

Théorie des Jeux : Modélisation Mathématique et Applications

October 2, 2007

Porteurs du projet de GDR :

MARC QUINCAMPOIX Université de Bretagne Occidentale (Brest)
SYLVAIN SORIN, Université P. et M. Curie-Paris 6
TRISTAN TOMALA, Université Paris Dauphine

Acronyme proposé: JEMMA

Laboratoire de rattachement du GDR Laboratoire de Mathématiques, UMR 6205, Université de Bretagne Occidentale (Brest).

1 Domaine de Recherche

Théorie des jeux: outils et méthodes mathématiques, modélisation et applications en particulier en économie, informatique et biologie.

2 Structuration du réseau

Le Groupe de recherche sera animé par les directeurs qui présideront le comité d'organisation, instance qui fera véritablement fonctionner le GdR. Un comité scientifique sera consulté pour les orientations de la recherche et donnera un avis sur les actions du comité d'organisation. Pour les colloques organisées par le GDR, il servira en grande partie de comité scientifique.

2.1 Comité scientifique.

- Pierre BERNHARD, Université Nice-Sophia Antipolis.
- Ivar EKELAND, Pacific Institute for the Mathematical Sciences, Vancouver.
- Josef HOFBAUER, University of Vienna.

- Alexander B. KURZHANSKI, Académie des Sciences, MGU, Moscou, Russie.
- Ehud LEHRER, University of Tel-Aviv.
- Andreu MAS-COLELL, University Pompeu Fabra, Barcelone.
- Jean-Charles ROCHET, Institut d'économie industrielle, Toulouse I.
- Georges ZACCOUR, HEC Montréal, Canada.

3 Comité d'organisation

- Eitan ALTMAN, INRIA Sophia Antipolis,
- Pierre CARDALIAGUET, Laboratoire de Mathématiques, UMR CNRS 6205, Brest,
- Régis FERRIERE, Laboratoire d'Ecologie, Ecole Normale Supérieure, Paris,
- Olivier GOSSNER, UMR Paris-Jourdan Sciences Economiques,
- Philippe JEHIEL, UMR Paris-Jourdan Sciences Economiques, Ecole Nationale des Ponts et Chaussée, Paris,
- Paul-André MELLIES, Preuves, programmes et systèmes, UMR CNRS 7126, Paris VII,
- Marc QUINCAMPOIX, Laboratoire de Mathématiques, UMR CNRS 6205, Brest,
- Sylvain SORIN, Combinatoire et Optimisation, UMR CNRS 7090, UPMC-Paris 6,
- Tristan TOMALA, CEREMADE, UMR CNRS 7534, Paris Dauphine,
- Nicolas VIEILLE, Département Finance et Economie, HEC, Paris.

4 Historique

Depuis une vingtaine d'années, un séminaire parisien hebdomadaire inter-universitaire de théorie des jeux se déroule à l'institut Henri Poincaré^{1,2} auquel ont, pour la plupart, participé les chercheurs français du domaine, ainsi qu'un panel important de spécialistes mondiaux.

Plus récemment des journées organisées à Paris 6 en 2002, puis à Roscoff en 2005³ ont permis de rassembler des chercheurs, essentiellement en mathématiques, venant d'organismes divers mais tous intéressés par ce domaine et ses applications.

Au niveau international, les productions en théorie des jeux apparaissent, entre autres via les activités de deux sociétés savantes: la Game theory society (<http://www.gametheorysociety.org/>) et l'International society of dynamic games (<http://www.isdg.tkk.fi/index.html>) au sein desquelles la communauté française joue depuis plusieurs années un rôle certain: comités d'organisation de colloques, édition de proceedings, comités éditoriaux de revues...

¹<http://www.ceremade.dauphine.fr/~tomala/semjeux.html>

²<http://ceco.polytechnique.fr/COLLOQUES/JEUX/archives.html>

³<http://maths2.univ-brest.fr/recherche/colloques/minijeu3.htm>

La thématique "Théorie des Jeux" est par essence pluridisciplinaire et apparait (au niveau théorique ou dans des problèmes de modélisation) dans plusieurs réseaux d'excellence nationaux ou internationaux comme:

- le TMR européen "Evolution equations"⁴ en mathématiques,
- le TMR "Games"⁵ en informatique,
- l'ANR Modèles aléatoires de l'évolution et du vivant⁶,
- l'ANR DECISION PROX (Optimisation, jeux et dynamique de la décision avec coût au changement)⁷,
- l'ANR jeunes chercheurs ATLAS⁸,
- les ACI⁹ "Information et rationalité limitée en économie" et "Stratégies de manipulation d'information".

Le nombre de chercheurs concernés, la variété des thèmes, la qualité et l'abondance des productions récentes d'une part, l'approfondissement de recherches inter-disciplinaires et l'émergence de problématiques transverses nouvelles d'autre part, nous conduisent à penser qu'il est maintenant opportun de fédérer les équipes travaillant en théorie des jeux. La création d'un GDR donnera une visibilité certaine au domaine, permettra de renforcer et pérenniser des liens scientifiques existants et favorisera l'émergence de synergies nouvelles autour des problèmes de modélisation où l'aspect stratégique est déterminant.

Il est important de remarquer ici que la taille prévue du GDR, environ 80 personnes, permettra de structurer la recherche dans le domaine de la théorie des jeux tout en gardant un volume raisonnable et maniable. Pour cela le réseau est volontairement ciblé sur les *aspects mathématiques et de modélisation des interactions stratégiques*; les problèmes d'applications pures sans interrogations soit sur la modélisation, soit sur les mathématiques sont sciemment laissés en dehors du champ du GDR.

5 Activités du GDR

Notre objectif pour les quatre ans d'exercice du GDR est d'organiser les événements suivants :

- une journée annuelle, (quatre au total)
- une conférence internationale biannuelle, (deux au total)
- une école thématiques d'été biannuelle (deux au total)

⁴<http://fraise.univ-brest.fr/~eveq/>

⁵<http://www.games.rwth-aachen.de/>

⁶<http://www.cmla.ens-cachan.fr/Cmla/ANRmaev/index.html>

⁷<http://www.ecp6.jussieu.fr/ANR06>

⁸<http://www.dma.ens.fr/%7Estoltz/themes.html>

⁹<http://www.recherche.gouv.fr/appe/2004/resacijc.pdf>, <http://www.u-cergy.fr/article4318.html>

Nous souhaitons pouvoir financer ces manifestations, et aider au co-financement de rencontres thématiques plus restreintes.

Comme le projet présenté rassemble de nombreux thèmes, un aspect central des manifestations sera la modélisation qui constituera le lien entre les diverses thématiques et aura un rôle moteur dans la structuration de la recherche.

Outre la diffusion des résultats scientifiques récents, chaque manifestation mettra l'accent sur un véritable transfert de connaissance. C'est pourquoi, nous essaierons de centrer les rencontres autour d'une ou deux conférences/cours de plusieurs heures, avec en plus, des exposés plus courts de 45 minutes donnés par des chercheurs confirmés. Nous inviterons des spécialistes internationaux pour ces rencontres. Bien évidemment, il nous semble important de privilégier le rôle des jeunes chercheurs (en particulier des doctorants en fin de thèse) en leur proposant de donner des exposés lors des conférences.

Pour les Ecoles thématiques d'été, le volume des cours augmentera considérablement par rapport aux conférences, mais nous envisageons toujours de permettre aux jeunes chercheurs de donner des exposés.

6 Projet Scientifique

Depuis les travaux initiaux de Borel et von Neumann (jeux à 2 joueurs et à somme nulle: valeur et stratégies optimales) puis la parution de *Theory of Games and Economic Behavior* (J. Von Neumann et O. Morgenstern, 1944) et la percée conceptuelle de Nash (équilibre pour les jeux à N joueurs), la théorie des jeux n'a cessé de se développer. Après 5 volumes dans les *Annals of Mathematical Studies*, Princeton U.P. (24, 28, 39, 40, 52) et les ouvrages *Games and Decision* (Luce et Raiffa, 1957) et *Differential Games* (Isaacs, 1965) le domaine s'affirme avec la création de revues spécifiques: *International Journal of Game Theory*, 1971, *Mathematics of Operations Research*, 1976 (dont "Game Theory" est une des 4 "research Area"), *Games and Economic Behavior*, 1989, *International Game Theory Review*, 1999.

Parallèlement de nombreux résultats de jeux apparaissent dans des revues générales de mathématiques et mathématiques appliquées: *SIAM J. Control and Optimization*, *Annals of Probability*, *Annals of Statistics*, *JOTA*, *Israel Journal of Mathematics*, *Differential Equations Dynamical Systems*, *Annals of Operations Research*...

En effet si les applications sont variées, la théorie des jeux, ancêtre dans les mathématiques appliquées, utilise des techniques relevant de nombreux champs parmi lesquels:

- Analyse non-linéaire et convexe, dualité, correspondance et points fixes (théorèmes de minmax et existence d'équilibre);
- EDP et théorie du contrôle, équation HJB et viscosité (jeux différentiels);
- Opérateurs monotones et équations d'évolution (jeux répétés);
- Probabilités, statistiques et processus stochastiques (jeux stochastiques, jeux à information incomplète);
- Mathématiques discrètes, graphes (search games);
- Aspects algébriques : treillis, ensembles semi-algébriques, topologie algébrique (variété des équilibres);
- Systèmes dynamiques et algorithmes (jeux d'évolution).

Après une période où les applications privilégiaient les duels et leurs extensions, l'approche stratégique en théorie des jeux a occupé un rôle de plus en plus important en économie à partir des années 70 et

est désormais un outil incontournable comme en témoignent, entre autres : -les prix Nobel d'économie attribués à des théoriciens des jeux: Nash, Harsanyi, Selten en 1994, Aumann et Schelling en 2005; -la part des articles de théorie des jeux dans les revues d'économie: *Econometrica*, *Journal of Economic Theory*, *Economic Theory*, *Journal of Mathematical Economics*, *Review of Economic Studies* ...; -et les ouvrages de référence comme *Game Theory* (Fudenberg et Tirole, 1991), *Microeconomic Theory* (Mas Colell, Whinston et Green, 2004) .

Parallèlement l'approche en termes d'interaction stratégique et de jeux s'est avérée très pertinente en biologie (évolution, compétition entre espèces) en particulier après la parution de l'ouvrage *Evolution and the Theory of Games* (Maynard Smith, 1982). Il s'agit désormais d'un thème récurrent des revues *J. Math. Biology*, *Theoretical Population Biology*, *J. Theoretical Biology*, entre autres.

Enfin une large communauté s'est développée en informatique théorique utilisant et développant des outils de théorie des jeux. Les domaines couvrent la complexité, les systèmes multi-agents, sémantique et langages, algorithmes de prédiction et sont représentés, entre autres dans *Theoretical Computer Science*, *Machine Learning*, ...

Les applications de la théorie des jeux touchent bien sûr beaucoup d'autres champs: relations internationales, linguistique, choix social...

Le GDR se propose de réunir des chercheurs de différents domaines (mathématiques, économie, informatique, biologie) autour des thèmes transversaux que la théorie mathématique des jeux aborde et de promouvoir la recherche dans des thématiques qui sont décrites dans les sections suivantes (avec des recoupements inévitables qui souligneront d'ailleurs les interactions possibles).

7 Thèmes

7.1 Jeux répétés

Les aspects dynamiques dans les jeux (jeux répétés/jeux différentiels) représentent une part très importante de la théorie. Les jeux répétés sont des modèles à temps discret pour lesquels le formalisme usuel des jeux s'applique (théorie des jeux en forme extensive). En toute généralité, les joueurs prennent des décisions à chaque étape et reçoivent des informations sur les décisions prises par leurs adversaires ainsi que sur l'état du jeu courant avant de passer à l'étape suivante. Ce formalisme est suffisamment souple pour englober: les jeux répétés à information complète (répétition d'un jeu fixe), les jeux répétés à information incomplète (avec asymétries d'information sur les paramètres du jeu) et les jeux stochastiques dans lesquels les paramètres du jeu évoluent en cours de partie. Une grande variété de problématiques, de techniques et d'applications sont obtenues suivant les sous-cas considérés.

7.1.1 Jeux répétés à information complète et "Folk Theorems"

Le cadre général est un jeu stratégique répété et l'étude porte sur l'ensemble des paiements accessibles et des paiements d'équilibre en fonction de la durée de l'interaction (limite de jeux finis ou escomptés, jeu infini). L'étude du cas d'information standard (full monitoring) est bien comprise et la recherche se porte sur l'extension aux jeux avec signaux où à l'issue de chaque étape la connaissance des coups des adversaires n'est pas nécessairement disponibles. Des travaux récents donnent des caractérisations de paiements d'équilibres dans les jeux avec mécanisme de communication exogène. Récemment de nombreux sous-problèmes ont été étudiés:

Communication et transmission stratégique d'information. Il s'agit d'étudier des problèmes de transmission stratégique d'information au travers d'un mécanisme de communication fixe, indépendamment d'une structure de paiements. Lorsque les joueurs peuvent s'envoyer des messages le long des arêtes d'un graphe, on retrouve des problèmes de cryptographie (codification, évaluation de la sûreté de diverses procédures). De manière duale, on peut étudier la conception de mécanismes permettant d'implémenter une classe d'équilibres donnés.

Un domaine connexe est l'analyse des aspects quantitatifs des phénomènes de transmission d'information: a) d'une part en introduisant des mesures de l'information, essentiellement par des méthodes entropiques, ce qui permet une étude fine des effets sur les paiements de variation des structures d'information, b) d'autre part en définissant une notion de valeur de l'information (au sens de "value of experiments") dans le cadre strictement compétitif (jeux à somme nulle).

Information et connaissance. Le développement de la modélisation de l'information et de la connaissance dans les jeux, fait apparaître, à côté des thèmes habituels de la théorie des jeux vue comme "théorie de la décision interactive", une "théorie de l'information interactive". Une série de problématiques nouvelles a émergé : opérateurs de connaissance et de croyance, degrés de connaissance publique,...

L'approche stratégique dans ce champ concerne alors plus les informations privées des agents que leurs actions et les problèmes typiques sont de l'ordre de l'apprentissage social.

Complexité. Un autre thème apparu dans ce domaine est l'étude de questions liées à la complexité : on peut distinguer la complexité du problème consistant à déterminer une stratégie optimale ou l'existence d'un équilibre, de l'évaluation de la complexité d'une stratégie elle-même, au sens de sa mise en oeuvre: c'est dans ce cadre qu'ont été introduits les jeux avec des espaces restreints de stratégies: mémoire finie, automates, machines de Turing. Il est alors naturel d'étudier l'impact de la complexité sur le résultat de l'interaction stratégique (dans ce cadre aussi l'utilisation de méthodes entropiques est souvent crucial).

7.1.2 Théorie générale des jeux répétés

Le modèle général est bien sur plus délicat à analyser et les problèmes d'existence et de caractérisation sont au coeur des préoccupations. Les approches varient selon les sous-cas étudiés.

Jeux à information incomplète. Il s'agit de jeux dépendant d'un paramètre (fixe) imparfaitement connu de tous les joueurs. La théorie dans le cadre de jeux à somme nulle est bien établie (Aumann et Maschler). L'étude de jeux à somme non nulle est en plein développement.

Jeux stochastiques. Ce modèle est l'extension naturelle des chaînes de Markov contrôlées par 2 joueurs. Pour le cas à somme nulle les problèmes concernent les extensions d'existence de valeur uniforme (à la Mertens-Neyman) au cadre de structures d'information générales. Le cas à somme non nulle vise à étendre les résultats d'existence d'équilibre. Dans le cas à un joueur, on vise à généraliser les résultats de programmation dynamique usuels (Blackwell) aux cas de signaux pour différents critères de convergence asymptotique.

Jeux d'arrêt. On vise ici à une approche globale des extensions des jeux de Dynkin où la stratégie des joueurs est un temps d'arrêt dépendant d'une information privée. L'étude porte, entre autres sur le

passage temps discret/temps continu et sur les extensions au cas à somme non nulle.

Théorie générale des jeux à somme nulle. L'approche en termes d'opérateurs permet une unification de l'étude asymptotique des jeux à information incomplète et stochastiques. On considère maintenant le cadre mixte où l'état est partiellement connu et évolue au cours du jeu. Le lien avec les équations d'évolution liées à des opérateurs maximaux monotones est prometteur.

Temps continu. L'idée est de représenter le jeu répété comme un jeu en temps continu joué avec des stratégies constantes par morceaux. La limite des valeurs apparaît alors comme solution d'une inégalité variationnelle. Dans le cas des jeux à information incomplète l'approche duale est particulièrement adaptée et donne lieu à une famille de nouveaux types d'équations aux dérivées partielles.

7.2 Jeux différentiels

7.2.1 Jeux différentiels à somme nulle

La théorie de l'existence d'une valeur pour des jeux différentiels est maintenant presque complète dans le cas sans contraintes, en la caractérisant comme unique solution d'une équation d'Hamilton-Jacobi-Isaacs. Ce n'est qu'assez récemment que des résultats d'existence de valeur pour des jeux à deux joueurs et une contrainte d'état assez générale ont été établis. Des questions restent ouvertes pour des jeux avec d'autres critères (par exemple en essentiel supremum). La théorie et la définition même de valeur en l'absence de condition d'Isaacs sur les Hamiltoniens est encore largement à faire.

Une théorie raisonnablement complète des variétés singulières solution de l'équation d'Isaacs est maintenant connue depuis les travaux de Pierre Bernhard à l'exception - notable - des variétés focales pour lesquelles la théorie est restée ouverte depuis cette époque.

7.2.2 Jeux différentiels et contrôle robuste

Les questions de contrôle robuste peuvent être modélisées par des jeux différentiels antagonistes à deux joueurs où l'incertitude est décrite comme un des joueurs ayant un objectif opposé à celui du contrôleur. Ceci est en particulier source de nombreux travaux et résultats comme le fameux "principe d'équivalence à l'incertitude".

7.2.3 Jeux différentiels à somme non nulle

L'étude des jeux différentiels à somme non nulle reste un des grands problèmes ouverts. On connaît depuis les années 1980 un équivalent du "Folk Theorem" pour ces jeux, grâce aux travaux de Kononenko, de Kleimenov et de Tolwinski, Haurie et Leitmann : cela concerne l'existence et la caractérisation des paiements d'équilibres de Nash pour des stratégies avec mémoire. La question de la sélection de ces équilibres, et notamment la recherche d'une notion d'équilibre sous jeu parfait, a fait l'objet de plusieurs travaux récents. Bressan et Shen ont montré, grâce à des techniques empruntées à l'étude des systèmes de lois de conservation, que le système d'équations de Hamilton-Jacobi naturellement associé à ce problème présentent des instabilités très fortes.

Parallèlement, l'étude du système d'équations de Hamilton-Jacobi par des outils géométriques conduit à une théorie des variétés doublement singulières. Cela donne un cas, où d'une part les

équations d'Isaacs couplées de l'équilibre de Nash en feedback se découplent, et où d'autre part un jeu différentiel à deux joueurs admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes (comportementales).

7.2.4 Jeux différentiels avec manque d'information

Les jeux différentiels avec manque d'information étudient les jeux en temps continu dans lequel les joueurs, tout en ayant une connaissance complète de l'état et/ou du contrôle des autres joueurs, n'ont accès qu'à une partie de l'information sur la valeur réelle des paiements. Ces jeux sont la transposition naturelle aux jeux différentiels de la théorie d'Aumann-Maschler qui est bien connue en jeux répétés.

Un second champ d'étude tourne autour des théorèmes de vérification. On sait que ceux-ci jouent un rôle central pour les jeux à somme nulle classiques. Il n'existe pas à ce jour d'équivalent pour les jeux avec manque d'information. Cette question est fortement liée à la construction des stratégies optimales pour les joueurs. La caractérisation de ces stratégies n'est toujours pas complètement comprise. On sait pour l'instant que les joueurs les fabriquent en construisant au cours du temps des martingales d'un type assez particulier.

7.2.5 Jeux différentiels Stochastiques

Un certain nombre de problèmes étudiées dans le cadre des jeux différentiels ne prennent vraiment tout leur sens que lorsqu'on considère leur équivalent stochastique (par exemple lorsqu'on vise des applications en mathématiques financières). L'existence et la caractérisation des jeux différentiels stochastiques est connue depuis W.H. Fleming, P.E. Souganidis en 1989. Dans l'étude des questions mentionnées dans les sections précédentes, une approche utilisant les équations différentielles stochastiques rétrogrades, est intéressante pour les jeux avec manque d'information.

7.2.6 Jeux aux dérivées partielles

Des problèmes d'optimisation multidisciplinaire -OMD- de systèmes régis par les équations aux dérivées partielles, se formalisent à l'aide de la théorie des jeux. L'objectif est la modélisation de problèmes couplés et/ou multicritère sous forme de jeux aux dérivées partielles, de Nash ou de Stackelberg par exemple, pour lesquels on étudie l'existence théorique d'équilibres, ainsi que la mise en oeuvre numérique. Les concepts de stratégie extrêmement étudiés pour les jeux différentiels depuis les années 70 sont ici encore largement à inventer dans ce cadre.

7.3 Modèles de jeux en économie

von Neumann et Morgenstern (*Theory of Games and Economic Behavior*) ont dès le départ conçu la théorie des jeux comme un fondement mathématique du comportement des agents économiques. Dans les années 1950, la démonstration rigoureuse de l'existence d'un équilibre général, qui repose sur la résolution d'un jeu auxiliaire, consolide l'interaction des deux disciplines. A partir des années 1960 et 1970, les économistes favorisent de plus en plus une approche stratégique, surtout afin de tenir compte des effets de différences d'information entre les agents. L'exemple le plus connu est la modélisation des enchères (Vickrey, Wilson). Depuis, l'interaction jeux/économie a pris une ampleur considérable, en particulier sur les thèmes suivants:

7.3.1 Jeux stratégiques de marché

Dans un jeu stratégique de marché, les agents décident des quantités de bien qu'ils mettent sur le marché en vue d'un échange. De multiples variantes permettent de préciser ce modèle, qui se propose avant tout d'expliquer la formation des prix par les choix stratégiques des agents. Si ceux-ci sont peu nombreux, les équilibres de Nash, dont l'existence ne va pas nécessairement de soi, diffèrent des équilibres de Walras. Sous des hypothèses appropriées, on établit la convergence des premiers équilibres vers les seconds quand le nombre d'agents s'accroît. On étudie même des modèles de "grands jeux" avec un continuum de joueurs. On a aussi entrepris l'étude de jeux de marché dynamiques, éventuellement en information imparfaite (tant sur les états de la nature que sur les décisions des agents), mais ce domaine est encore largement inexploré, alors qu'il est devrait permettre une meilleure compréhension du traitement usuel des économies intertemporelles, soumises à l'antisélection ou à l'aléa moral. Les résultats obtenus pour les jeux répétés (voir section correspondante) devraient éclairer ce thème de recherche. Dans une toute autre direction, l'étude de dynamiques non-stratégiques (tâtonnement), qui pose des questions en termes de systèmes dynamiques, rejoint celle des problèmes d'apprentissage dans les jeux.

7.3.2 Economie industrielle

La modélisation porte sur des problèmes de concurrence imparfaite où les acteurs économiques ont un impact sur les variables pertinentes : prix et/ou quantités. De nombreux travaux ont porté sur les problèmes de localisation, d'entrée, de différenciation et de segmentation des marchés. Les aspects dynamiques sont souvent cruciaux dans ces modèles qui sont, à l'origine de certains modèles de jeux répétés (Green et Porter). On retrouve ici les problèmes de "Folk théorèmes" avec observation imparfaite.

7.3.3 Economie de l'information

L'étude des modèles principal/agent : aléa moral, anti-sélection, et plus généralement la théorie des contrats ainsi que la théorie des enchères relèvent de la théorie des jeux à information incomplète (e.g. "signalling games"). On s'intéresse à la caractérisation des équilibres, à leur robustesse par rapport à différents critères de sélection, aux propriétés d'optimalité. On trouve ici de nombreuses problématiques communes avec les parties jeux répétés à information incomplète / jeux à observation imparfaite : corrélation, communication, valeur de l'information, sécurité des transmissions.

7.3.4 Rationalité limitée

L'étude d'un certain nombre de paradoxes (du type backward induction) a conduit d'une part à un développement important des théories de sélection d'équilibre et d'autre part à une étude fine des propriétés de dépendance par rapport à la structure d'information. Les phénomènes de réputation ont donné lieu à une importante littérature.

7.4 Informatique

7.4.1 Théorie de la démonstration et sémantique des langages

Les langages de programmation contemporains sont typés : à tout programme du langage on associe un type, qui décrit l'interface par laquelle ce programme interagit avec son environnement. Le typage des

programmes permet d'écrire un code plus sûr, et mieux structuré. Depuis une quinzaine d'année, on sait décrire tout type comme un jeu, dans lequel le programme joue une stratégie qui interagit avec la contre-stratégie que joue son environnement. Cette sémantique des jeux est structurée par la logique linéaire et les catégories monoidales. Elle permet de donner un contenu mathématique à la programmation. Ainsi, on sait caractériser les stratégies qui peuvent être programmées dans un langage de programmation donné, ce qui permet de caractériser chaque langage par la classe de comportements interactifs qu'il autorise ([37], [45], [25]).

7.4.2 Théorie descriptive des ensembles

L'étude de la détermination (c'est-à-dire l'existence des stratégies gagnantes pour l'un des joueurs) dans les jeux infinis à information parfaite tient une place centrale en théorie descriptive des ensembles. D'un côté elle permet de développer une théorie satisfaisante des ensembles projectifs et plus généralement définissables, théorie qui étend la théorie classique des ensembles analytiques et co-analytiques. De l'autre côté on peut utiliser les axiomes de grands cardinaux pour démontrer la détermination des ensembles définissables, ce qui permet à la fois de justifier ces axiomes et de développer la théorie des modèles internes pour les grands cardinaux([55], [56], [58]).

7.4.3 Théorie combinatoire

Les jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé et leur généralisations jouent un rôle central dans l'étude des langages et logiques infinitaires. La théorie combinatoire des ensembles permet d'étudier la détermination de ces jeux et de classifier et comparer les différents types de logique infinitaire.

7.4.4 Vérification

Vérifier qu'un programme informatique satisfait une spécification donnée revient à contruire un jeu (à somme nulle et à information parfaite) et à vérifier que la stratégie correspondant au programme est gagnante dans le jeu défini par la spécification. Un problème plus délicat consiste ensuite à synthétiser un programme qui se comporterait bien vis-à-vis d'une spécification donnée, quelque soit le comportement de l'environnement. Il s'agit donc de calculer une stratégie gagnante dans le jeu défini par la spécification. On peut vouloir aussi contrôler un programme existant afin de satisfaire une spécification donnée (quel que soit le comportement de l'environnement). Dans ce cas, le contrôleur est une stratégie gagnante qui représente le programme valide dans le fragment du jeu exploré par le programme initial.

8 Interactions récentes

L'une des principales raisons de la création de ce GDR est, en plus du développement important et récent du domaine et de ses applications, l'établissement de liens profonds et significatifs entre des approches différentes ou des thématiques variées. Quelques exemples sont mentionnés ci-dessous.

8.1 Jeux répétés/jeux différentiels

Bien qu'apparues simultanément, la théorie classique des jeux et celle des jeux différentiels se sont pendant longtemps développées de façon autonome. Tandis que les concepts et problématiques de

théorie des jeux ne cessaient de s'étendre et se développer dans diverses directions, les chercheurs en jeux différentiels se sont intéressés le plus souvent soit à l'étude de jeux à somme nulle et à information parfaite, soit aux problèmes d'existence d'équilibre pour les jeux à somme non nulle. La principale raison à cela est d'ordre technique : les résultats en jeux différentiels ont été fortement tributaires d'avancées dans le domaine des équations aux dérivées partielles (équations de Hamilton-Jacobi Bellman (HJB)) et des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR). La compréhension profonde des équations de HJB ne date que des années 1980, avec des concepts de solutions non lisses (solutions de viscosité introduit par Crandall et Lions ou "constructive motion" étudiés et développés par l'école de Krassovski et Pontryaguine).

8.1.1 Problèmes de manque d'information en jeux différentiels

Pour les jeux différentiels, l'existence et la caractérisation de la fonction valeur pour les jeux à somme nulle (dans un cadre simplifié d'information incomplète) a été obtenue dans des travaux récents. Cette caractérisation fait apparaître une nouvelle classe d'équation de type Hamilton-Jacobi et permet d'unifier et d'éclairer des résultats sur les jeux répétés.

Parmi les extensions possibles on souhaite alléger les hypothèses sur l'information disponible. Dans les travaux précédents, cette information se réduisait à une probabilité sur un ensemble fini. Il est important de généraliser les résultats existants à des informations plus complexes (en temps continu notamment), de façon à pouvoir comparer la théorie aux travaux sur les problèmes d'information en contrôle stochastique (insider models).

Dans le cas où le manque d'information est symétrique pour les deux joueurs, par exemple quand les deux joueurs ne connaissent qu'une probabilité sur l'état initial du système, on peut réduire le problème à un problème à information parfaite mais où la variable d'état devient une mesure. Il s'agit alors de prouver l'existence d'une valeur en établissant des résultats d'unicité d'équations d'Hamilton Jacobi posées sur l'espace des mesures. La théorie du transport optimal à la Monge Kantorovitch joue là un rôle crucial.

Un dernier grand thème de recherche du domaine est l'étude des jeux à somme non nulle avec manque d'information. On s'intéressera notamment à la validité d'un "Folk Theorem" dans ce cadre. De plus, le lien avec les "valeurs uniformes" en jeux répétés devrait s'avérer particulièrement important.

8.1.2 Approchabilité pour les jeux répétés et équation d'évolution

Parallèlement, certains outils typiques des jeux différentiels ont fait leur apparition dans la théorie des jeux répétés où l'existence d'une valeur pour un jeu différentiel est un ingrédient essentiel pour obtenir des résultats d'approchabilité (faible) pour les jeux répétés. Ce domaine très fructueux est en cours de défrichage.

Le passage en continu dans les formules de récurrence pour les valeurs des jeux répétés fait apparaître des propriétés de semi-groupes pour des opérateurs maximaux monotones.

8.1.3 Jeux différentiels impulsions et contrôle robuste

Une approche récemment proposée pour le contrôle robuste concerne le cas où un joueur réagit contre une inconnue, qui en fait donne lieu à une incertitude sur la position de l'état du système. Il est alors possible de transformer ce jeu avec connaissance imparfaite de l'état en un jeu à information parfaite mais où la variable d'état est ensembliste

Les jeux impulsionnels peuvent être abordés dans le cadre d'un exemple : celui d'un problème de tarification d'option dans un marché qui d'une part permet de traiter les coûts de transaction, et d'autre part, se prête à développer une théorie de transactions discrètes ou continues avec le même modèle de marché, la solution discrète convergeant bien vers la solution continue quand le pas de temps tend vers zéro. Un théorème de représentation a été très récemment obtenu, en lien avec les solutions de viscosité de l'équation d'Isaacs, et donne un algorithme rapide pour calculer les stratégies optimales. C'est là une technique de commande robuste (donc un inf-sup sans considérations d'existence de la valeur) qui est utilisée pour un problème de contrôle impulsionnel.

Parallèlement, des résultats récents d'existence de valeurs pour des jeux différentiels impulsionnels de poursuite à deux joueurs ont été obtenus quand les deux joueurs ne pouvaient pas choisir leurs "impulsions" simultanément. Des extensions sont en cours pour le cas de jeux différentiels hybrides.

8.1.4 Jeux différentiels stochastiques

Un travail récent a permis de comparer les approches EDP de Fleming-Souganidis et EDS rétrograde pour les jeux différentiels [60]. Les problèmes de manque d'information sont encore largement ouverts dans ce cadre.

8.1.5 Jeux sur les équations d'évolution

Un exemple typique étudie un cas où l'on modélise le problème de conception de topologie (d'une structure) comme un équilibre de Nash entre deux joueurs : la thermo-élasticité a pour objectif la maximisation de la rigidité et l'équation de la chaleur a pour objectif la minimisation de la quantité de chaleur emmagasinée [41, 40]. Parallèlement, des approches de jeux de Nash sont développées pour modéliser des processus biologiques, comme l'angiogénèse tumorale où l'on définit un jeu topologique entre activateurs et inhibiteurs de ce phénomène.

8.2 Jeux et Economie

8.2.1 Transmission d'information

L'un des buts d'Aumann et Maschler, lorsqu'ils ont introduit le modèle des jeux répétés à information incomplète, dans les années 1960, était d'étudier la transmission stratégique de l'information. Les applications économiques potentielles sont apparues avec l'étude des jeux à somme non-nulle, surtout développée dans les années 1980. Parallèlement, Crawford et Sobel (1982) ont introduit le «discours gratuit» («cheap talk») dans les jeux «émetteur-récepteur», qui ne comportent qu'une seule étape. Les applications les plus diverses ont suivi (négociation entre le vendeur et l'acheteur, rôle des experts financiers et des conseillers, etc.). Selon Crawford et Sobel, le discours gratuit est le privilège de l'émetteur, et une étape de transmission d'information épuise donc les possibilités de communication des joueurs. L'étude des jeux répétés révèle le rôle de joueurs non informés au cours de la communication et de là, l'importance de la durée de celle-ci. L'impact d'une longue conversation entre les joueurs est parfaitement caractérisé dans le cas d'un seul agent informé (Aumann et Hart) mais un cadre plus général mériterait d'être analysé. D'autres questions, comme la stabilité stratégique des équilibres dans les jeux où le discours gratuit est autorisé, ou l'effet combiné d'un coût de signal et d'une communication longue entre les joueurs, sont encore largement ouvertes.

8.2.2 Passage micro-macro

L'idée est de déduire les données économiques fondamentales de l'agrégation de dynamiques individuelles spécifiées au niveau micro économique, en tenant compte des interactions locales et des limitations d'information. Différents modèles de marchés, correspondant à des spécificités de rationalité ou de structuration en réseaux apparaissent.

8.2.3 Finance

Une première analyse vise à modéliser le processus de formation des prix explicitement (et non pas de le concevoir comme une donnée a priori). L'apparition d'un mouvement Brownien apparaît alors comme une conséquence de l'utilisation stratégique de différences informationnelles.

Les jeux de Dynkin ont une importance particulière en mathématiques financières en particulier dès qu'il s'agit de pricer les options américaines de jeu ou alors les obligations convertibles. Le cas d'un critère de risk-sensitive est particulièrement importante. Un cas important et pas encore élucidé est celui des problèmes de jeu de somme nulle ou non nulle où l'information est apporté par un processus de Levy. Ce type de modèle est d'une grande importance dès qu'il s'agit de considérer des actifs financiers pouvant faire défaut.

8.2.4 Enchères

Le modèle des enchères a suscité un nombre très important de travaux et couvre un large champ (types de procédures, évaluation privées, bien divisibles et enchères simultanées, etc...). Un problème important est lié au rythme d'acquisition d'information au cours de la procédure elle même. L'étude des questions d'existence d'équilibre dans les modèles d'enchères a permis d'élargir les techniques usuelles de point fixes pour les preuves d'existence.

8.2.5 Rationalité limitée

Des travaux récents étudient le cas d'agents dont la capacité de traitement des informations est limitée. On peut suivre l'impact au niveau des croyances individuelles ou considérer des classes d'analogie qui pourraient correspondre à des états d'un automate représentant la stratégie. On rejoint ici les problèmes de complexité dans les jeux répétés et les modèles de calculs issus de l'informatique théorique.

8.3 Jeux et informatique

8.3.1 Jeux stochastiques et jeux sur les graphes

Un thème actuel en informatique théorique est l'étude des jeux sur les graphes (jeux d'accessibilité, jeux de priorité). Ils s'inscrivent naturellement dans le formalisme des jeux stochastiques tout en ayant des critères de gains qui ne sont pas traditionnels dans cette littérature (ce ne sont pas des critères cumulatifs). L'interaction est ici directe, la communauté vérification et la communauté jeux stochastiques ayant des méthodes différentes, l'échange de technologie s'annonce mutuellement fructueux.

8.3.2 Machine Learning

Le théorème d'approchabilité de Blackwell (1956) a connu de nombreuses applications en jeux répétés (voir les interactions jeux répétés/jeux différentiels) ainsi que dans les problèmes d'apprentissage. Il permet en effet la construction de stratégies sans-regret dans des processus de décision "on-line" (les décisions sont a-posteriori asymptotiquement optimales, quelle que soit la loi du processus des paiements). La communauté Machine Learning (à l'interface informatique théorique/statistique) cherche des algorithmes efficaces d'apprentissage (de façon équivalente, des stratégies sans regret) en contrôlant les termes d'erreurs. Les techniques utilisées (par exemple l'apprentissage Logit) se rapprochent des algorithmes d'apprentissage en théorie des jeux (smooth fictitious play) et les nouvelles problématiques, notamment les algorithmes de prédiction en observation imparfaite, rejoignent les problèmes de jeux répétés avec signaux.

8.3.3 Complexité

Les problèmes de complexité en jeux utilisent les notions de modèles de calcul (automates, machines de Turing) pour représenter des stratégies de complexité bornée. De manière duale, les chercheurs en informatique de la communauté "vérification" étudient les automates via des méthodes de théorie des jeux. Ces deux communautés ont commencé à se rapprocher et les participations aux mêmes séminaires ou conférences se développent.

8.3.4 Cryptographie, théorie de l'information

Les problèmes de transmission d'information indépendante d'une structure de paiements, sont d'une part un outil essentiel pour la construction de stratégies d'équilibre dans certains jeux répétés (notamment avec des joueurs placés en réseaux) et s'identifient d'autre part à des constructions de protocoles de communication robustes à des attaques de pirates informatiques sur le réseau. La encore, on observe une fertilisation croisée des deux domaines : les jeux permettent une formalisation plus réaliste des questions de fiabilité des protocoles, et d'autre part des notions informatiques (entropie de Shannon, capacité de canaux, clefs d'authentification) permettent de construire des équilibres.

8.3.5 Recherche Opérationnelle

La plupart des grands problèmes de recherche opérationnelle sont actuellement revus dans un cadre de jeux, en supposant que plusieurs agents interviennent et en remplaçant l'optimum par l'équilibre de Nash (ou ses adaptations au contexte, équilibre de Wardrop ...), voir les thèmes "Computational Game Theory" ou "Algorithmic Game Theory".

Pour les réseaux de télécommunication, on peut d'utiliser plusieurs outils:

- (i) Les jeux évolutionnaires, dans le cadre d'un projet européen nommé BIONETS. Il s'agit d'appliquer des méthodologies du monde biologique à la conception d'architectures des réseaux.
- (ii) Les jeux de potentiel: on utilise des techniques issues du trafic routier (équilibre de Wardrop qui est obtenu dans un jeu dont la fonction potentiel a été identifiée par Beckmann il y a 50 ans) et les jeux de congestion de Rosenthal. On les applique aux problèmes de communication sans fil.
- (iii) Les jeux avec contraintes. En particulier, on développe des outils de calcul pour les jeux stochastiques avec contraintes avec des informations partielles qui diffèrent d'un joueur à l'autre.

L'étude des réseaux de files d'attente, problème très actuel, permet de rejoindre les jeux différentiels. Le modèle est souvent formulé comme un problème d'optimisation avec des objectifs intégraux

et un temps d'arrêt. En utilisant une approche asymptotique on peut espérer obtenir des résultats analytiques explicites pour un problème de contrôle dynamique des réseaux. La démarche générale pour les processus Markoviens proposée par Fleming et Whittle, permet de considérer un objectif d'optimisation "*sensible au risque*" exponentiel. Cette approche ramène (après un passage à la limite) à des *jeux différentiels* avec une dynamique fluide modifiée.

8.4 Biologie et Jeux d'évolution

8.4.1 Modèle de conflit en ecologie comportementale

Fréquemment, l'étude de modèles de conflit en écologie comportementale, source très riche de problèmes intéressants en eux mêmes, force aussi à considérer les notions de stratégies évolutivement stables (ESS) et leur lien avec les problèmes de jeux (statiques). Cela peut donner lieu au cas rare où un jeu différentiel à deux joueurs admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes (comportementales); ce résultat est apparu dans un exemple de biologie théorique.

8.4.2 Evolution de la coopération

Ce thème est très étudié et porte sur plusieurs modèles de l'évolution de l'altruisme en tenant compte de différents paramètres: structure du réseau d'interaction, distribution de la population, mobilité locale, mutation/imitation/sélection, dynamiques adaptatives...

8.4.3 Interaction aléatoire

On considère ici des systèmes complexes d'interaction où la nature des liaisons (favorables ou antagonistes) peut varier ou avoir un double caractère et l'on étudie l'évolution spatiale et temporelle. Un problème similaire se pose alors pour la crédibilité des signaux dans des structures de communication interactives.

8.4.4 Réseaux d'interaction

Des modèles où les joueurs sont engagés simultanément dans plusieurs interactions ont été introduits pour analyser des problèmes de régulation de l'expression de gènes.

On considère aussi des évolutions multi-niveaux (ou une structure hiérarchique de jeux) où une stratégie (ou un type) correspond à un ensemble de comportements dans un sous jeu ou bien où la compétition opère au sein du groupe et entre groupes.

9 Equipes et membres

Voir fichier joint.

10 Cours de Master

- PSE Master APE : 24h en MI (microéconomie II), 24h en MII (négociation enchères jeux répétés), 12h en MII (théorie de la décision).

- DAUPHINE Master MASEF: MI 20h (Initiation théorie des jeux), MII 20h au premier semestre (Théorie des jeux), 20h au second semestre (Interactions stratégiques de long terme).
- Paris 6 Master Mathématiques de la Modélisation: MI 48h (Optimisation et Jeux) , MII parcours OJME: 36 h au premier semestre (Stratégies et évolution); 3 cours de 18h au second semestre (Jeux répétés à somme nulle, jeux différentiels, dynamiques d'évolution)
- PARIS 1 MII MMMEF: 4 cours, 1 cours au premier trimestre, 3 au second semestre.
- Brest Master II "Mathématiques fondamentales et applications" (cohabilité Rennes), 1 cours au second semestre.

11 Thèses, postes

-thèses en cours: V. Perchet (Sorin), G. Vigeral (Sorin), J. Peypouquet (Sorin), C. Saavedra (Ponssard/Laraki), P. Contou-Carrère (Abdou) H. Tembine (Altman), As Soulaïmani (Cardaliaguet-Quincampoix), Goreac (Buckdahn-Quincampoix), Hamelin (Bernhard), Thierry (Bernhard), Deschamps (Bernhard).

-thèses récentes:

Mathématiques

Cruck, Rigal, Serea (Brest), Daher, Marino (Paris 1), Viossat (Polytechnique), Stoltz (Orsay), Boulogne (Paris 6), Zalinescu (Brest)

Economie

Mathis (Cergy)

Informatique

Gimbert (Paris 7)

hdr: Rosenberg (Paris 13), Tomala (Dauphine)

postes promotions: Mathis (MC Toulouse), Viossat (MC Dauphine), Stoltz (CR CNRS ENS), Gossner (DR CNRS)

References

- [1] Aubin, J.-P., *Dynamic economic theory. A viability approach.* Studies in Economic Theory. 5. Berlin: Springer. (1997).
- [2] Aumann R.-J. and M. Maschler, *Repeated Games with Incomplete Information.* M.I.T. Press, 1995.
- [3] Aumann R.-J. and S. Hart, *Handbook of Game Theory, I, II, III.* North-Holland, 1992-1994-2002.
- [4] Basar T. and P. Bernhard, *H^∞ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems. A Dynamic Game Approach,* 2nd ed., Birkhäuser, 1995.
- [5] Basar, T. and G.J. Olsder, *Dynamic Noncooperative Game Theory,* 2nd ed. Classics in Applied Mathematics. 23. SIAM, 1999.
- [6] Cesa-Bianchi N. and G. Lugosi, *Prediction, Learning and Games,* Cambridge University Press, 2006.

- [7] Demange G. et J.-P. Ponssard, *Théorie des Jeux et Analyse Economique*, PUF, 1994.
- [8] Fleming, W.H.n P.E. Souganidis, On the existence of value functions of two-player, zero-sum stochastic differential games. *Indiana Univ. Math. J.* **38**, 293-314, 1989.
- [9] Hamadène, S., J.P. Lepeltier, Zero-sum stochastic differential games and backward equations. *Syst. Control Lett.* **24**, 259-263, 1995.
- [10] Hofbauer J. and K. Sigmung, *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge University Press, 2004.
- [11] Krassovskii, N.N. and A.I. Subbotin, *Game-Theoretical Control Problems*, Springer-Verlag, 1988.
- [12] Laraki R. , J. Renault and T. Tomala, *Théorie des Jeux : Introduction à la Théorie des Jeux Répétés. Journées Mathématiques XUPS 2006*. Editions de l'Ecole Polytechnique, 2006.
- [13] Mas-Colell, M. Whinston and J. Green, *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, 1995
- [14] Maynard Smith J., *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press, 1992.
- [15] Jorgensen S., M. Quincampoix and T. Vincent T. (eds.), *Advances in Dynamic Game Theory: Numerical Methods, Algorithms, and Applications to Ecology and Economics*, Birkhauser, 2006.
- [16] Neyman A. and S. Sorin (eds.), *Stochastic Games and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [17] Roughgarden T., *Selfish Routing and the Price of Anarchy*, M.I.T. Press, 2005.
- [18] Sorin S., *A First Course on Zero-Sum Repeated Games*. SMAI, Springer, 2002.
- [19] Subbotin, A.I. *Generalized solutions of first-order PDEs. The dynamical optimization perspective*. Basel: Birkhäuser, 1994.

ARTICLES

- [20] Avram F., D. Bertsimas D. and Ricard M., Fluid models of sequencing problems in open queueing networks; an optimal control approach. *Stochastic Networks, F. Kelly and R. Williams, eds*, IMA, **71**, 199-234, 1995.
- [21] Avram F. Some calculations and conjectures on a differential game motivated by the risk-sensitive control of queueing networks in the large deviations regime, <http://www.univ-Pau.fr/~avram/papers/difsh.pdf>, 2002.
- [22] Benaim M., J. Hofbauer and S. Sorin, Stochastic approximations and differential inclusions, *SIAM J. on Control and Optimization*, **44**, 328-348, 2005.
- [23] Bernhard P., Chain differentials with an application to the mathematical fear operator *Nonlinear Analysis*, **62**, 1225-1233, 2005.
- [24] Bernhard P., N. El Farouq and S. Thiery, An Impulsive Differential Game Arising in Finance with Interesting Singularities, *Annals of the ISDG*, **8**, 335-363, 2006.

- [25] A. Blass, A game semantics for linear logic, *Annals of Pure and Applied Logic* 56(1-3): 183-220, 1992.
- [26] Buckdahn R., P. Cardaliaguet and C. Rainer, Nash equilibrium payoffs for nonzero-sum stochastic differential games. *SIAM J. Control Optimization*, **43**, 624-642, 2004.
- [27] Cardaliaguet P., M. Quincampoix M. and P. Saint-Pierre, Pursuit differential games with state constraints, *SIAM J. Control and Optim.* , **39**,1615-1632, 2001.
- [28] P. Cardaliaguet, M. Quincampoix, and P. Saint-Pierre, Numerical methods for optimal control and differential games, *Annals of International Society of Dynamical Games* Bardi, Parthasarathy, Raghavan (eds.), Birkhauser, 177-249, 2001.
- [29] Cesa-Bianchi N., G. Lugosi and G. Stoltz, Regret minimization under partial monitoring. *Mathematics of Operations Research*, **31**, 562-580, 2006.
- [30] Compte O. et Jehiel P., On the role of outside options in bargaining with obstinate parties, *Econometrica*, **70**, 1477-1517, 2002.
- [31] Compte O. et Jehiel P., On the Value of Competition in Procurement Auctions, *Econometrica*, **70**, 343-355, 2002.
- [32] Delaplace F., Chettaoui C., Manceny M. and M. Malo, Games network and Application to PAs system, *Biosystems*, **87**, 136-141, 2007.
- [33] De Meyer B., On the strategic origin of Brownian motion in finance, avec H. Moussa Saley, *International Journal of Game Theory*, **31**, 2003.
- [34] Forges F. and Koessler F., Communication equilibria with partially verifiable types, *Journal of Mathematical Economics*, **41**, 793-811, 2005.
- [35] Forges F. and Koessler F., Long Persuasion Games, à paraître dans *Journal of Economic Theory*.
- [36] D. Gale and F. M. Stewart, Infinite games with perfect information, in Contributions to the Theory of Games II, *Annals of Mathematics Studies* 28, Princeton University Press, Princeton NJ : 245-266, 1953.
- [37] J.Y. Girard, Linear Logic, *Theoretical Computer Science*, London Mathematical **50**, 1-102, 1987.
- [38] Gossner O. and T. Tomala, Empirical Distributions of beliefs under imperfect monitoring. *Mathematics of Operations Research*, **31**, 13-31, 2006.
- [39] Gossner O., P. Hernandez and A. Neyman, Optimal use of communication resources. *Econometrica*, **74**, 1603-1636, 2006.
- [40] Habbal A., M. Thellner and J. Petersson. Multidisciplinary topology optimization solved as a Nash game. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 949-963, **61**, 2004.
- [41] Habbal A. Multidisciplinary topology design and Partial differential games, *IUTAM Symposium on "Topological design optimization of structures, machines and materials - - status and perspectives"*, *Solid Mechanics and Its Applications*, M.P. Bendsoe, N. Olhoff and O. Sigmund (eds.), Springer, 585-593, 2006.

- [42] Hamadène S., Mixed zero-sum differential game and American game options, *SICON*, **45**, 496-518, 2006.
- [43] Hamadène S. and I. Hdhiri, BSDEs with two reflecting barriers and quadratic growth coefficient without Mokobodski's condition. *Applications, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, Article ID 95818, 28 pages, 2006. doi:10.1155/JAMSA/2006/95818, 2006.
- [44] Hamelin F., P. Bernhard, A.J. Shaiju and E. Wajnberg, Foraging under competition: evolutionarily stable patch-leaving strategies with random arrival times. 2 "Interference competition", *Annals of the ISDG*, **9**, 2006.
- [45] M. Hyland et L. Ong, On Full Abstraction for PCF, *Information and Computation*, **163**, 285-408, 2000.
- [46] P. Jéhiel, Analogy-Based Expectation Equilibrium, *Journal of Economic Theory*, **123**, 81-104, 2005.
- [47] P. Jéhiel and D. Samet, Learning to Play Games in Extensive Form by Valuation, *Journal of Economic Theory*, **124**, 129-148, 2005.
- [48] Koessler F., Persuasion Games with Higher-Order Uncertainty. *Journal of Economic Theory*, **110**, 393-399, 2003.
- [49] Koessler F., Strategic Knowledge Sharing in Bayesian Games. *Games and Economic Behavior*, **48**, 292-320, 2004.
- [50] Laraki R., On the regularity of the convexification operator on a compact set, *Journal of Convex Analysis*, **11**, 209-234, 2004.
- [51] Laraki R., Repeated games with lack of information on one side : the dual differential approach, *Mathematics of Operation Research*, **27**, 419-440, 2002.
- [52] Le Galliard JF, Ferrière and U. Dieckmann, Adaptive evolution of social traits: origin, trajectories, and correlations of altruism and mobility, *The American Naturalist* , **165**, 206-224, 2005.
- [53] Le Galliard JF, Ferrière R. and U. Dieckmann, The adaptive dynamics of altruism in spatially heterogeneous populations, *Evolution*, **57**, 1-17, 2005.
- [54] Lehrer E. and D. Rosenberg, What restrictions do bayesian games impose on the value of information, *Journal of Mathematical Economics*, 2006.
- [55] D. Martin, Borel determinacy, *Ann. of Math.* **102**, 363–371, 1975.
- [56] D. Martin, et J. Steel, A proof of projective determinacy, *J. Amer. Math. Soc.* , **1**, 71–125, 1989
- [57] Melikyan, A. and P. Bernhard, Geometry of optimal paths around focal singular surfaces in differential games, *Appl. Math. Optimization*, **52**, 23-37, 2005.
- [58] I. Neeman, Determinacy in $L(\mathbb{R})$ (A survey), To appear in the Handbook of Set Theory.

- [59] Quincampoix M. and V. Veliov, Optimal Control of Uncertain Systems with Incomplete Information for the Disturbances, *SIAM J. of Control and Optim.*, **43**, 1373-1399, 2005.
- [60] Rainer C.. On two different approaches to nonzero-sum stochastic differential games, à paraître dans *AMO*, 2006.
- [61] Renault J., 3-player repeated games with lack of information on one side. *International Journal of Game Theory*, **30**, 221-245, 2001.
- [62] Renault J., The value of Markov chain repeated games with lack of information on one side. *Mathematics of Operations Research*, **31**, 490-512, 2006.
- [63] Renault J. and T. Tomala, Learning the state of nature in repeated game with incomplete information and signals. *Games and Economic Behavior*, **47**, 124-156, 2004.
- [64] Renault J. and T. Tomala. Communication equilibrium payoffs of repeated games with imperfect monitoring. *Games and Economic Behavior*, **49**, 313-344, 2004.
- [65] Rosenberg D., E. Solan and N. Vieille, Stochastic games with single controller and incomplete information, *SICON*, **43**, 90-110, 2004.
- [66] Rosenberg D., E. Solan and N. Vieille, Blackwell Optimality in Markov Decision Processes with Partial Observation, *Annals of Statistics*, **30**, 2002.
- [67] Rosenberg D., E. Solan and N. Vieille, Social learning in one-arm bandit problems, *Econometrica*, forthcoming.
- [68] Serea O., Discontinuous differential games and control systems with supremum cost. *J. Math. Anal. Appl.*, **270**, 519-542, 2002.
- [69] Sorin S., New approaches and recent advances in two-person zero-sum repeated games, in *Advances in Dynamic Games*, Nowak A. S. and K. Szajowski (eds.), Birkhauser, 67-93, 2005.
- [70] Stoltz G. and G. Lugosi, Learning correlated equilibria in games with compact sets of strategies. *Games and Economic Behavior*, à paraître.
- [71] Väänänen J., Games and trees in infinitary logic: A Survey, In M. Krynicki, M. Mostowski and L. Szczereba, editors, *Quantifiers*, Kluwer Academic Publishers, 105-138, 1995.
- [72] van Baalen M, Jansen VAA, Kinds of kindness: classifying the causes of altruism and cooperation, *J. Evol. Biol.*, 1377-1379, 2006.
- [73] Viossat, Y. The Replicator Dynamics Does not Lead to Correlated Equilibria, à paraître dans *Games and Economic Behavior*, 2007.
- [74] Viossat, Y. Is Having a Unique Equilibrium Robust, à paraître dans *Journal of Mathematical Economics*, 2007.
- [75] Z. Tang, J. Périaux and J.-A. Désidéri, Multi Criteria Robust Design Using Adjoint Methods and Game Strategies for Solving Drag Optimization Problems with Uncertainties, *East West High Speed Flow Fields Conference 2005*, 487-493, 2005.