Université Pierre et Marie Curie,
L3, Année 2008-2009
J. Bolte

Analyse Hilbertienne - L3

Contrôle continu 2

Les réponses non justifiées ne seront pas comptabilisées.

1. Etant donné un entier n positif, on désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus n. Pour tout couple de polynômes P, Q, on pose

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i).$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, *i.e.* une forme bilinéaire symétrique positive non-dégénérée.

2. On considère l'espace vectoriel $E = C([0,1];\mathbb{R})$ des fonctions continues définies sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'espace E est muni de la norme

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

On définit l'application

$$\Psi : \begin{cases} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt \end{cases}$$

a) Montrer que Ψ est linéaire et *continue*.
b) Donner l'allure du graphe des fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}[\\ -nx + \frac{n}{2} & \text{si } x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}[\\ -1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

où n est un entier supérieur à 3.
c) En utilisant les f_n, montrer que $||\Psi|| = 1$. On rappelle à cet effet que la norme de Ψ est définie par

$$||\Psi|| = \sup\{|\Psi(f)| : ||f||_1 \leq 1\}.$$

3. $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

On considère la famille de $\mathbb{R}^3$ donnée par les vecteurs $e_1 = (1,1,0), e_2 = (0,1,1)$ et $e_3 = (1,0,1)$.

Après s'être assuré(e) que le système $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est bien une base, donner son orthonormalisé de Schmidt.

4. L'application linéaire (ne pas justifier de sa linéarité)

$$D : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ f & \to & f' \end{cases}$$

est-elle continue ?