Université Pierre et Marie Curie,
L3, Année 2008-2009
J. Bolte

Analyse Hilbertienne - L3

Correction contrôle continu 2

1. Soient λ, μ des réels et P_1, P_2, Q trois polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, on a :
$\langle \mu P_1 + \lambda P_2, Q\rangle$

$$= \sum_{i=0}^{n} (\mu P_1 + \lambda P_2)(i)Q(i) = \sum_{i=0}^{n} (\mu P_1(i) + \lambda P_2(i))Q(i) = \sum_{i=0}^{n} \mu P_1(i)Q(i) + \lambda \sum_{i=0}^{n} P_2(i)Q(i).$$

Ainsi $\langle P_1 + \lambda P_2, Q\rangle = \mu\langle P_1, Q\rangle + \lambda\langle P_2, Q\rangle$. La symétrie, ie $\langle P, Q\rangle = \langle Q, P\rangle$ pour tout P, Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, est évidente et donc $\langle, \cdot, \cdot\rangle$ est bilinéaire symétrique. La positivité s'obtient via $\langle P, P\rangle = \sum_0^n P(i)^2 \geq 0$. Pour la non-dégénérescence on remarque que $\langle P, P\rangle = 0$ implique la nullité de tous les $P(i)$ pour $i = 0, \ldots, n$. Ainsi P est un polynôme de dégré n possédant $n + 1$ racines distinctes, P est donc le polynôme nul.

L'application $\langle\cdot, \cdot\rangle$ définit donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. a) La linéarité est une simple vérification. Pour s'assurer de la continuité de Ψ on remarque que

$$|\Psi(f)| = |\int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^{1} f| \leq |\int_0^{1/2} f| + |\int_{1/2}^{1} f| \leq \int_0^{1/2} |f| + \int_{1/2}^{1} |f| = ||f||_1,$$

pour toute fonction f de E. Cela montre la continuité de Ψ avec, en prime, $||\Psi|| \leq 1$.
b) Clair.
c) Fixons $n \geq 3$. On procède géométriquement en remarquant que $f_n(x) \geq 0$ pour x dans $[0, 1/2]$ et $f_n(x) \leq 0$ pour x dans $[1/2, 1]$. Ainsi $\Psi(f_n) = ||f_n||_1$. Par ailleurs le réel $||f_n||_1$ s'obtient en retranchant l'aire du triangle isocèle de sommets $(1/2 - 1/n, 1), (1/2, 0), (1/2 + 1/n, 1)$ de l'aire du carré de sommets $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$. Ainsi

$$\Psi(f_n) = ||f_n||_1 = 1 - \frac{1}{n}.$$

On a donc $||f_n|| \leq 1$ et $\Psi(f_n) \to 1$ lorsque $n \to +\infty$. Par définition de Ψ, il s'ensuit $||\Psi|| \geq 1$. Finalement, grâce à la question a), $||\Psi|| = 1$

3. Fait en TD.

4. L'application D est une application linéaire entre espaces vectoriels de dimensions finies, elle est donc continue.