Travaux de recherche

Mes travaux de recherche s'inscrivent dans les mathématiques discrètes. Je me suis notamment intéressé aux problèmes qui portent sur les domaines de la théorie élémentaire des nombres, la géométrie discrète et convexe, et la théorie des graphes. Cette synthèse présente un résumé de mes travaux par domaine de recherche.

Théorie élémentaire des nombres

(Problème de Frobenius, semigroupes numériques)

Soit $a_1, \ldots, a_n$ entiers positifs premiers entre eux, et soit $S = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires à coefficients non négatifs de $a_1, \ldots, a_n$, autrement dit, $S = \{a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \mid x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. Alors, S est un *semigroupe numérique*. Le plus grand entier qui n'appartient pas à S est appelé *le nombre de Frobenius* (noté par $g(a_1, \ldots, a_n)$)[1]. Á première vue ce nombre peut sembler plutôt spécialisé, mais on le retrouve dans des endroits les plus inattendus. La connaissance de ce nombre a une grande variété d'applications aux sujets différents comme les codes algébriques, la complexité algorithmique ou encore les graphes. L'étude et la compréhension de ce nombre ont été l'objet de nombreux articles de recherche. J'ai écrit un livre (seul auteur) [L1] qui expose des résultats connus sur le sujet. Sylvester (1882) a donné une solution explicite pour le cas $n = 2$ ($g(a_1, a_2) = a_1a_2 - a_1 - a_2$) mais une formule similaire pour $n \geq 3$ n'est pas connu à ce jour. En 1996, j'ai démontré [A20] que ce problème est $\mathcal{NP}$-difficile en général, et donc l'éventuelle existence d'une formule pour $n \geq 3$ quelconque est sans espoir (sauf si $P = NP$). J'ai également trouvé des formules pour certaines séquences liées aux nombres de Fibonacci et aux progressions arithmétiques [A1, A4].

Depuis quelques temps, je m'intéresse aux *trous* d'un semigroupe S (autrement dit, les entiers non négatifs qui ne sont pas dans S). En utilisant une approche géométrique (en appliquant le théorème de Pick), j'ai étudié [A3] le comportement des trous quand $n = 2$ et aussi quand le semigroupe est engendré par des progressions arithmétiques. J'entends généraliser cette approche pour étudier les trous d'un semigroupe avec $n \geq 3$, en faisant un lien entre un polytope construit à partir des éléments du semigroupe et le *polynôme d'Ehrhart* associé à ce polytope. J'ai également étudié la relation entre le nombre de Frobenius et la *série d'Hilbert* [A1]. Cette relation nous a permis d'établir une méthode polynomiale qui calcule $g(a_1, a_2, a_3)$ et d'étudier la *symétrie* de certains semigroupes (un semigroupe S est dit *symétrique* si $S \cup (g - S) = \mathbb{Z}$). En particulier, j'ai donné une caractérisation pour la symétrie de $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$.

[1] Le problème de trouver $g(a_1, \ldots, a_n)$ peut être consideré comme un problème de mathémaques récréatives en termes de *timbres* comme l'explique un recent article grand public, ou mes travaux ont été cités, paru dans *NewScience* (et traduit en allemand dans *Spektrum der wissenschaft*).

J'ai par ailleurs considéré certaines variantes proches de ce problème comme le problème des *sous-sommes d'entiers* [A18] (lié au problème du sac-à-dos) et le problème des *jarres de vin* [A22]. J'ai récemment trouvé une application du nombre de Frobenius à un problème de *pavage* [S1] concernant les *rectangles* et les *tores*. Par exemple, j'ai montré qu'il existe un entier C tel que pour tout $a, b \geq C$ le tore de dimension $a \times b$ est pavable par les rectangles $(u \times v)$ et $(x \times y)$ si et seulement si $pgcd(xy, uv) = 1$ (l'entier C est donné explicitement) ou encore sur le pavage de rectangles de dimension n par un ensemble de rectanagles. Actuellement, j'étudie le même genre de problèmes mais en considérant des objets différents tels que l'espace projectif, ou le ruban de Möbius. Finalement, je m'intéresse à une conjecture de V.Arnold qui établit que

$$g(a_1, \ldots, a_n) = g(A) = c(n) \left(\frac{1}{2} n! \prod A \right)^{\frac{1}{n-1}} - \sum A$$

où $c(n)$ est une constante.

Géométrie discrète, convexe et algorithmique

(matroïdes, matroïdes orientés, arrangements d'hyperplans, polytopes)

Dans ce domaine, je m'intéresse aux problèmes liés aux *matroïdes* et aux *matroïdes orientés*[2]. La structure des matroïdes s'obtient en retenant les principales propriétés combinatoires de la dépendance linéaire dans les espaces vectoriels. Géométriquement, les matroïdes axiomatisent les propriétés d'incidence des configurations de points ou dualement d'hyperplans dans les espaces euclidiens. Dans un esprit analogue à celui des matroïdes, la structure des matroïdes orientés, plus élaborée, prend en compte les signes.

J'ai notamment considéré des problèmes sur les arrangements d'hyperplans. Les matroïdes orientés fournissent un modèle combinatoire efficace des arrangements d'hyperplans réels. Les régions d'un arrangement central sont en bijection avec les réorientations acycliques du matroïde orienté des dépendances linéaires de l'arrangement. Ce point de vue m'a permis de résoudre de façon quasi optimale le problème suivant de McMullen : quel est le plus petit nombre $n = f(d)$ tel qu'il existe une collection de n hyperplans en position générale en dimension d dont aucune région n'est bornée par tous les hyperplans ? On sait que $2d + 2 \leq f(d)$ et la valeur optimale conjecturée (par D. Larman) est précisément $f(d) = 2d + 2$. J'ai montré [A8] que $f(d) \leq (2.5)d$ (les meilleures bornes supérieures connues avant mon travail étaient quadratiques en d).

J'ai également obtenu plusieurs résultats énumératifs liés aux *régions* induites par un arrangement d'hyperplans. Par exemple, j'ai apporté [A16] une réponse à un problème de B. Grünbaum concernant le nombre maximal de *simplexes* d'un arrangement de lignes, ou encore, j'ai donné [A10] une formule explicite pour le nombre de k-régions (une région entourée par exactement k hyperplans) de l'*arrangement cyclique* (qui est le dual du *polytope cyclique*).

[2] Les matroïdes et des matroïdes orientés ont un grand nombre d'applications qui vont de l'optimisation et géométrie discrète, convexité, polyèdres, triangulations, graphes, cryptographie - à des branches plus éloignées de mathématiques comme la géométrie algébrique réelle.

Comme pour le polytope cyclique, l'arrangement cyclique a également des propriétés extrêmes. Par exemple, il admet un nombre minimal de simplexes [A11] ou encore il est conjecturé que cet arrangemet contient le nombre maximal de *régions complètes* (des régions qui sont chacune entourée par tous les hyperplans). J'ai montré [A12] que cette conjecture est vraie dans l'espace. En outre, j'ai étudié un problème lié aux *codages minimaux* de matroïdes orientés [A6, A15].

Actuellement, je me penche sur l'étude du polyèdre des bases d'un matroïde. Le *polyèdre des bases* d'un matroïde est l'enveloppe convexe de l'ensemble des vecteurs d'incidence des *bases*. Le polyèdre des bases a des propriétés fondamentales mises en évidence par J. Edmonds et I.M. Gelfand mais est par sa taille et sa dimension très difficile à manipuler. Une meilleure connaissance de cet objet aurait des conséquences pour des questions de *fiabilité des réseaux*. Les travaux de L. Lafforgue établissent une méthode générale de *compactification* dont l'existence est liée aux polyèdres de bases *pavables* (c'est-à-dire des polyèdres qui admettent une décomposition géométrique particulière). Dans [S2], j'ai donné une méthode pour l'existence d'une telle décomposition et également démontré qu'un polyèdre n'est pas pavable si le matroïde est *binaire*. J'entends continuer à étudier ce polytope en utilisant un lien entre les matroïdes et les fonctions *quasi-symétriques*.

Théorie des nœuds

(Graphes spaciaux, problème de dénouage)

Un *nœud* est une courbe simple dans l'espace à trois dimensions. La théorie des nœuds compte parmi les théories majeures de la science contemporaine de par les multiples interactions et ses applications à d'autres domaines. On dit qu'un ensemble de n points dans l'espace à trois dimensions *engendre* un nœud K s'il existe une numérotation de ces points, disons $a_0, \ldots, a_{n-1}$, tel que la courbe définie par les segments $[a_i, a_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$ (l'addition modulo n) est isotope à K. Je me suis intéressé à la question suivante : quel est le plus petit nombre entier n tel que tout ensemble de n points en position générale dans l'espace engendre un type de nœud donné ? En utilisant la théorie des matroïdes orientés, j'ai établi [A14] que 7 points induisent toujours le 'trêfle' (le nœud non trivial le plus simple) ou son *miroir*. J'ai aussi montré [A9] l'existence de 8 points qui n'engendrent pas le deuxième lacet non trivial. Récemment, j'ai étudié le plongement des nœuds dans le *polytope cyclique*. J'ai montré [A2] qu'un polytope cyclique à $7n$ points contient un cycle *isotope* à un nœud donné K représenté par un diagramme à n croisements. Ceci m'a permis de donner une borne supérieure $c(n)$ tel que tout ensemble de $c(n)$ points engendre K (avant mon travail l'existence d'une telle borne était connue mais pas explicitée). Dans [A5], j'ai fait un résumé des résultats sur cette question et de problèmes associés[3].

[3] Ce papier a été classé $18^{\text{è}}$ parmi le *Top 25 hottest articles, Discrete Mathematics*, octobre-décembre 2008 par *ScienceDirect* (http ://top25.sciencedirect.com/).

J'utilise [P3] ce plongement spécial et le fait que l'espace des réalisations du matroïde orienté associé à ce polytope est connexe pour étudier le problème de *dénouage* [C1] : existe-t-il un algorithme efficace qui détecte si un nœud donné est *trivial* (c'est-à-dire un nœud sans croisement)[4] ? Mes récents travaux (où les matroïdes orientés jouent un rôle essentiel) montrent que le lien entre ces deux théories se révèle très riche. Je cherche à modéliser les nœuds en utilisant la théorie des matroïdes orientés, ce qui nous permettra d'explorer les nœuds dans l'espace sans passer par leurs *représentations planaires*, ce qui serait une approche complètement nouvelle. En particulier, je suis en train d'étudier le lien entre la représentation d'un nœud dans les sommets d'un polytope cyclique et ses invariants algébriques (tels que les polynômes de Jones, Hoffman, etc.) en utilisant les *mots de Gauss*.

Théorie des graphes

(Décompositions en arbres, cycles ou chaînes)

Dans ce domaine, je travaille sur les problèmes liés aux décompositions de l'ensemble d'arêtes d'un graphe en chaînes ou en arbres ou encore en cycles. J'ai étudié la décomposition du graphe complet en chaînes [A19] en introduisant la notion du *spread* d'un graphe eulérien. Dans [A13], j'ai trouvé des résultats concernant la décomposition d'un graphe complet en arbres en utilisant les *étiquetages gracieux*. Je me suis aussi intéressé à la *conjecture d'Alspach* : soit n un entier impair et $a_1, \ldots, a_m$ des entiers tels que $a_1 + \cdots + a_m = \binom{n}{2}$,$3 \leq a_i \leq n$, existe-t-il une partition de l'ensemble des arêtes du graphe complet à n sommets en cycles arête-disjoints de longueur $a_1, \ldots, a_n$? J'ai montré [A21] que la conjecture d'Alspach est vraie pour certaines séquences $a_1, \ldots, a_m$.

J'ai également étudié les *combinoèdres* (qui peuvent être considerés comme une généralisation du permutaèdre). Les combinoèdres sont non seulement des graphes (en tant qu'objets combinatoires) mais aussi des ensembles ordonnés (induits par les *treillis multinomials*). Dans [A7], j'ai trouvé des plongements explicites du combinoèdre dans des intervalles du réseau *cubique* et dans des intervalles du réseau *racine*. Actuellement, je m'intéresse aux problèmes liés aux *pavages* de l'espace avec des polytopes définis par l'enveloppe convexe de l'ensemble de points de certains plongements proposés dans [A7].

[4] Une application fondamentale d'un tel algorithme est dans l'étude de l'ADN pour caractériser les *enzymes* en termes de familles de nœuds produites.