

Thèse d'Habilitation  
pour diriger des recherches en Mathématiques

**Géométrie Combinatoire, Théorie des Nombres  
et Graphes**

Présentée par  
J.L. Ramírez Alfonsín

à l'Université Pierre et Marie Curie - Paris 6

# Table des matières

Résumé des travaux de recherche	iii
Research work summary	v
<b>1 Théorie Élémentaire des Nombres</b>	<b>1</b>
1.1 Problème des jarres de vin . . . . .	1
1.2 Le problème des sous-sommes des entiers . . . . .	3
1.3 Le problème diophantine de Frobenius . . . . .	4
1.3.1 La complexité du nombre de Frobenius . . . . .	4
1.3.2 Semi-groupe de Fibonacci . . . . .	5
1.3.3 Pavages d'un rectangle et du tore . . . . .	6
1.4 Semi-groupes . . . . .	9
<b>2 Géométrie Discrète et Convexe</b>	<b>11</b>
2.1 Codages de matroïdes orientés . . . . .	11
2.2 Arrangements d'hyperplans . . . . .	14
2.2.1 Problème de McMullen . . . . .	15
2.2.2 Problème de Grünbaum . . . . .	16
2.2.3 $\gamma$ -arrangements . . . . .	18
2.3 Nœuds dans des graphes spaciaux . . . . .	20
<b>3 Théorie des Graphes</b>	<b>27</b>
3.1 Le spread (l'étendue) d'un graphe . . . . .	27
3.2 Étiquetages gracieux . . . . .	28
3.3 La conjecture d'Alspach . . . . .	30
3.4 Le combinoèdre . . . . .	31
<b>Bibliographie</b>	<b>39</b>



# Résumé des travaux de recherche<sup>1</sup>

Mes travaux de recherche se situent en mathématiques discrètes. Je me suis notamment intéressé aux problèmes qui portent sur les domaines de la théorie élémentaire des nombres, la géométrie discrète et convexe, et la théorie des graphes. Je présente ci-dessous une synthèse de mes travaux par domaine de recherche.

## **Théorie élémentaire des nombres**

J'ai initialement commencé par étudier le problème des *jarres de vin* pour lequel j'ai trouvé un algorithme polynomial qui apporte une solution optimale [19]. Tout naturellement, ce dernier problème m'a conduit à étudier des variantes du problème de *sous-sommes d'entiers* [15], puis le *problème de Frobenius* : étant donné des entiers positifs  $a_1, \dots, a_n$ , premiers entre eux, quel est l'entier le plus grand qui n'est pas une combinaison linéaire de  $a_1, \dots, a_n$  à coefficients positifs ? L'étude et la compréhension de ce problème ont été l'objet de nombreux articles de recherche (cf. mon livre [31]). J'ai démontré d'une part [17] que ce problème est  $\mathcal{NP}$ -difficile en général et, d'autre part, l'existence d'une formule pour certaines séquences [1]. J'ai également étudié des applications du nombre de Frobenius aux problèmes de *pavage* [23]. Depuis quelques temps, je m'intéresse au semigroupe engendré par  $a_1, \dots, a_n$ , notamment à ses *trous*. En utilisant une approche géométrique, je me suis penché [21] sur le comportement des trous dans quelques familles de semigroupes ainsi que sur le *genus* de certaines familles de semigroupes [22].

## **Géométrie discrète et convexe**

Dans ce domaine, je m'intéresse aux problèmes liés aux matroïdes orientés,

---

<sup>1</sup>Tous mes travaux de recherche sont disponibles sur le site : <http://www.ecp6.math.jussieu.fr/pageperso/ramirez/habilitation/>

notamment aux problèmes liés aux *régions* induites par un arrangement d'hyperplans. J'ai étudié le problème suivant de *McMullen* : quel est le plus petit nombre  $n = f(d)$  tel qu'il existe une collection de  $n$  hyperplans en position générale en dimension  $d$  dont aucune région n'est bornée par tous les hyperplans ? On sait que  $2d + 2 \leq f(d)$  et la valeur optimale conjecturée (par D. Larman) sont précisément  $f(d) = 2d + 2$ . J'ai montré [5] que  $f(d) \leq (2.5)d$  (les meilleures bornes supérieures connues avant mon travail étaient quadratiques en  $d$ ). J'ai apporté [13] une réponse à un problème de B. Grünbaum concernant les *simplexes* d'un arrangement de lignes et j'ai par ailleurs [7] donné une formule qui compte exactement le nombre de régions à  $k$ -faces d'un arrangement *cyclique*. En outre, j'ai démontré plusieurs résultats énumératifs aux problèmes toujours liés aux arrangements d'hyperplans [7, 8, 14]. J'ai par ailleurs étudié un problème lié aux *codages minimaux* de matroïdes orientés [3, 12].

Je me suis intéressé à la question suivante : quel est le plus petit nombre entier  $n$  tel que tout ensemble de  $n$  points en position générale dans l'espace engendre un type de nœud donné ? (cf. mon article [2] pour un résumé des résultats sur cette question). En utilisant la théorie des matroïdes orientés, j'ai établi [11] que 7 points induisent toujours le *trefoil* (le nœud non trivial le plus simple) ou son *miroir*. J'ai aussi montré [6] l'existence de 7 points qui n'engendrent pas le deuxième entrelacet non trivial.

Récemment, j'ai étudié le plongement de nœuds dans le *polytope cyclique*. J'ai montré [24] qu'un polytope cyclique à  $6n$  points contient un cycle *isotope* à nœud donné représenté par un diagramme à  $n$  croisements. Ceci m'a permis de démontrer que tout ensemble de  $2^{2^{6n}}$  points contient un nœud représenté par un diagramme avec  $n$  croisements.

## Théorie des graphes

Je m'intéresse à la décomposition (d'arêtes) du graphe complet dans des chaînes [16] (en introduisant le paramètre *spread*) et en arbres [10] (en corrélation avec les *étiquetages gracieux*). Je me suis aussi penché sur la *conjecture d'Alspach* : soit  $n$  un entier impair et  $a_1, \dots, a_m$  des entiers tels que  $a_1 + \dots + a_m = \binom{n}{2}$ ,  $3 \leq a_i \leq n$ , existe-t-il une partition de l'ensemble des arêtes du graphe complet à  $n$  sommets en cycles arête-disjointes de longueur  $a_1, \dots, a_m$  ? J'ai montré [18] que la conjecture d'Alspach est vraie pour certaines séquences  $a_1, \dots, a_m$ . Je m'intéresse également aux propriétés du *combinatoire* (une généralisation du *permutoèdre*). Dans [4], j'ai donné quelques résultats sur des plongements du combinatoire.

# Research work summary<sup>1</sup>

My research work is in the field of discrete mathematics. I am interested in problems of elementary number theory, discrete and convex geometry and graph theory. I briefly describe below my research.

## Elementary Number Theory

I started my research by investigating the recreational *jug wine problem*. I found [19] a polynomial time algorithm that solves this puzzle. This problem, naturally lead me to consider variants of the *subset sum problem* [15] and then the *Frobenius problem* : given relatively prime positive integers  $a_1, \dots, a_n$ , find the largest natural number (called the *Frobenius number*) that is not representable as a nonnegative integer combination of  $a_1, \dots, a_n$ . A number of methods, from several areas of mathematics, have been used in the hope of finding a formula giving the Frobenius number and algorithms to calculate it (cf. my book [31]). I proved [17] that this problem is  $\mathcal{NP}$ -hard under Turing reductions and also gave formulas for the Frobenius number for certain sequences [1]. I recently applied [23] the Frobenius number to a problem in relation with *tilings*.

I am also interested in the numerical semigroup generated by  $a_1, \dots, a_n$ , and in its *gaps*. By using a geometric approach, I investigated [21] the behaviour of the gaps for some semigroups' families. I also studied [22] the *genus* (an important parameter) of some semigroups.

## Discrete and convex geometry

I am interested in problems related to oriented matroids, particularly in connection with the *cells* induced in by arrangements of hyperplanes. I investigated the problem of *McMullen* : what is the smallest integer  $n = f(d)$  such

---

<sup>1</sup>All my research papers are available at the web site : <http://www.ecp6.math.jussieu.fr/pageperso/ramirez/habilitation/>

that there exists an  $d$ -dimensional arrangement of  $n$  hyperplane in general position in which any of its regions is not bounded by all the hyperplanes? It is known that  $2d + 2 \leq f(d)$  and it was conjectured (by D. Larman) that  $f(d) = 2d + 2$ . I showed [5] that  $f(d) \leq (2.5)d$  (the best upper bound known before my work were of order  $O(d^2)$ ). I gave [13] a positive answer to a problem posed by B. Grünbaum concerning the *simplexes* of an arrangement of lines and gave a formula [7] that counts the number of  $k$ -cells (that is, cells bounded by exactly  $k$  hyperplanes) of the *cyclic* arrangement. In [7, 8, 14] other enumerative results in connection with cells are also given. I studied [3, 12] a problem in relation with the *minimal codification* of oriented matroids as well.

I have considered the following question : what is the smallest integer  $n$  such that any set of  $n$  points in the space in general position generates a linear knot of given type? (cf. my paper [2] for a summary of results on that question). By using the oriented matroids, I showed [11] that any set of 7 points generate either the *trefoil* (the simplest nontrivial knot) or its *mirror*. I also showed [6] the existence of a configuration of 7 points not containing the second simplest nontrivial link.

I investigated the embedding of linear knots on the vertices of the *cyclic polytope*. I proved [24] that a 3-dimensional cyclic polytope on  $6n$  vertices contains a cycle *isotopic* to a given knot represented by a diagram with  $n$  crossings. This result yield to the following : any set of  $2^{2^{6n}}$  points contains a knot represented by a diagram with  $n$  crossings.

## Graph theory

I studied [16] the partition of the edges of the complete graph into paths (by introducing the *spread* parameter). I also investigated [10] the edge-partition of complete graphs into trees by considering the *graceful labelings*.

In addition, I investigated *Alspach's conjecture* : let  $n$  be an odd integer and let  $a_1, \dots, a_m$  be integers such that  $a_1 + \dots + a_m = \binom{n}{2}, 3 \leq a_i \leq n$ , does there exist a partition of the set of edges of the complete graph on  $n$  vertices in edge-disjoint cycles of length  $a_1, \dots, a_m$ ? I proved [18] that Alspach's is true for certain sequences  $a_1, \dots, a_m$ . Finally, I also studied [4] some embedability properties of the *combinahedron* (a generalization of the well-known *permutahedron*).

# Chapitre 1

## Théorie Élémentaire des Nombres

Dans ce chapitre, je présente mes travaux de recherche consacrés à des problèmes qui portent sur la théorie élémentaire des nombres.

### 1.1 Problème des jarres de vin

Le problème des *jarres de vin*<sup>1</sup> est le suivant :

*Nous avons trois jarres avec des capacités  $B$ ,  $M$  et  $S$  avec  $B = M + S$  et  $M \geq S \geq 1$ . Le contenu de chaque jarre peut être versé dans une autre jusqu'à ce que la première soit vide ou bien que la deuxième soit remplie. Initialement, la jarre de capacité  $B$  est remplie de vin et les deux autres sont vides.*

*On voudrait diviser le vin équitablement avec  $\frac{1}{2}B$  litres de vin dans les jarres  $B$  et la même quantité dans la jarre  $M$  et que la jarre  $S$  soit vide en faisant le moins de versements possibles. Est-il possible de partager le vin de manière équitable ? Si tel est le cas, quel est le plus petit nombre de versements à effectuer ? et, comment obtenir un tel nombre ?*

J'ai démontré [19] qu'il est possible de partager le vin équitablement si et seulement si  $B$  est divisible par  $2r$ , où  $r = p.g.c.d.(M, S)$ . Si tel est le cas, alors le plus petit nombre de versements est  $\frac{1}{r}B - 1$ , et l'unique séquence de

---

<sup>1</sup>Ce problème est une généralisation du jeu original avec  $B = 8$ ,  $M = 5$  and  $S = 3$  proposé par Tartaglia, un mathématicien italien du XVI siècle [40].

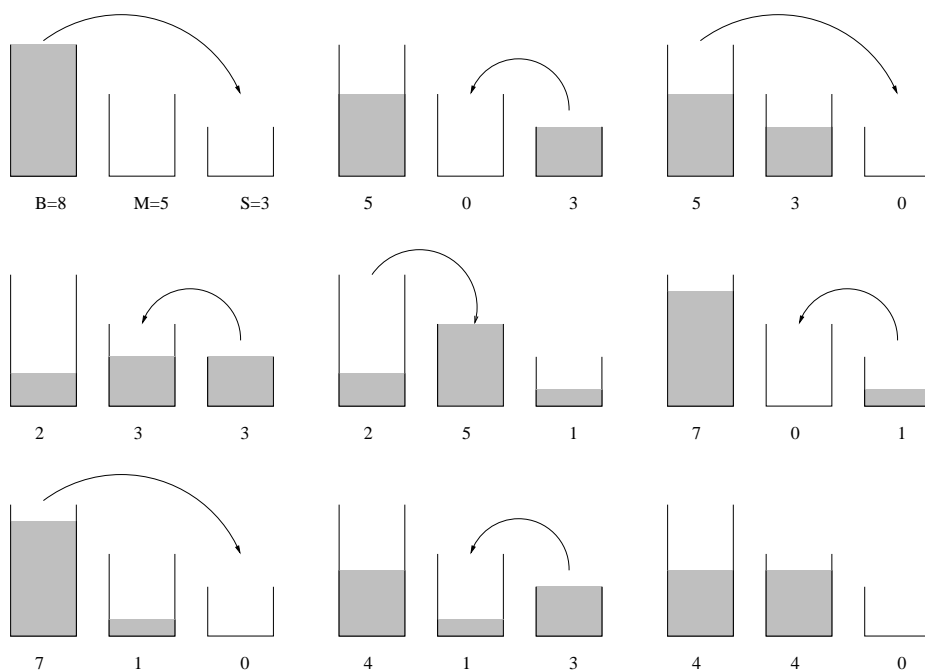


FIG. 1.1 – Séquence des versements.

versements optimale est donnée par les premiers  $\frac{1}{r}B - 1$  pas (versements) de l'algorithme ci-dessous.

On utilise  $b, m, s$  pour noter les quantités de vin dans chacune des jarres  $B, M, S$ .

Algorithme
Verser le contenu de la jarre $B$ dans la jarre $M$
<b>Répéter</b>
Verser le contenu de la jarre $M$ dans la jarre $S$
Verser le contenu de la jarre $S$ dans la jarre $B$
<b>si <math>m &lt; S</math> alors</b>
Verser le contenu de la jarre $M$ dans la jarre $S$
Verser le contenu de la jarre $B$ dans la jarre $M$

Dans la figure 1.1 l'algorithme ci-dessus est appliqué quand  $B = 8, M = 5$  et  $S = 3$ .

**Problème 1.1.1** *Trouver un algorithme pour résoudre le problème des jarres de vin avec  $n \geq 4$  jarres.*

## 1.2 Le problème des sous-sommes des entiers

Tout naturellement, le problème des jarres de vin m'a amené à considérer le problème de *sous-sommes d'entiers* : soit  $m, a_1, \dots, a_n$  des entiers et soit  $d'(m; a_1, \dots, a_n)$  le nombre des solutions à

$$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = m \text{ avec entiers } x_i \geq 0.$$

Ce problème est connu  $\mathcal{NP}$ -complet mais il peut-être résolu en temps polynomial si la séquence  $a_1, \dots, a_n$  est *super-croissante*, c'est à dire si  $\sum_{i=1}^j a_i \leq a_{j+1}$  pour  $j = 1, \dots, n-1$ . J'ai considéré la variante suivant (*sous-sommes d'entiers avec répétitions* : soit  $m, a_1, \dots, a_n, r_1, \dots, r_n$  des entiers tels que  $0 \leq a_i \leq r_i$  pour  $i = 1, \dots, n$  et soit  $d(m; a_1, \dots, a_n)$  le nombre des solutions à

$$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = m \text{ avec entiers } 0 \leq x_i \leq r_i.$$

La séquence  $a_1, \dots, a_n$  est appelée *chaîne* si  $a_j | a_{j+1}$  pour  $j = 1, \dots, n-1$ , et *arithmétique* si  $a_{j+1} = a_1 + jd$  pour  $j = 1, \dots, n-1$  et  $d$  un entier.

Parmi plusieurs résultats, j'ai démontré dans [15] les deux théorèmes suivants :

**Théorème 1.2.1** [15] *Il existe un algorithme polynomial qui détermine si  $d(m; a_1, \dots, a_n) \geq 1$  si*

- (a)  $a_1, \dots, a_n$  est arithmétique et
- (b)  $a_1, \dots, a_n$  est une chaîne.

En général, déterminer si  $d(m; a_1, \dots, a_n) \geq 1$  est un problème difficile car il contient le problème de sous-sommes comme un cas particulière (quand  $r_i = 1$  pour tout  $i$ ).

**Théorème 1.2.2** [15] *Décider si  $d(m; a_1, \dots, a_n) \geq 1$  est  $\mathcal{NP}$ -complet même si la séquence  $a_1, \dots, a_n$  est super-croissante et  $r_i \leq 2$  pour tout  $i$ .*

**Question 1.2.3** *Soit  $m$ , un entier et  $p, q$ , deux nombres premiers. Existe-t-il un algorithme polynomial pour déterminer si  $d(m; p, p^2, \dots, p^n, q, q^2, \dots, q^n) \geq 1$  avec  $r_i = 1$  pour tout  $i$  ? Qu'en est-il quand  $p = 3$  et  $q = 5$  ?*

J'ai également étudié le problème *des sous-sommes lourdes des entiers* (SSL) : étant donnés des entiers  $a_1, \dots, a_n, r_1, \dots, r_n, K$  et  $L$ , existe-t-il  $K$  ou plus vecteurs des entiers distincts  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  tels que  $\sum_{i=1}^n a_i x_i \geq L$  avec  $0 \leq x_i \leq r_i$  pour  $i = 1, \dots, n$  ?

**Théorème 1.2.4** [15] *SSL peut être résolu en temps polynomial si la séquence  $a_1, \dots, a_n$  est arithmétique et  $r_i = 1$  pour tout  $i$ .*

**Théorème 1.2.5** [15] *SSL peut-être résolu en temps polynomial si  $\sum_{i=1}^j r_i a_i \leq a_{j+1}$  pour chaque  $j = 1, \dots, n - 1$ .*

### 1.3 Le problème diophantine de Frobenius

Au début du siècle dernier, Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) a proposé dans ses conférences (d'après Brauer [38]) le problème suivant (appelé le *problème diophantine de Frobenius* **FP**) : étant donné des entiers positifs  $a_1, \dots, a_n$ , premiers entre eux, quel est l'entier le plus grand (appelé *nombre de Frobenius* et noté  $g(a_1, \dots, a_n)$ ) qui n'est pas une combinaison linéaire de  $a_1, \dots, a_n$  à coefficients positifs ?

A première vue, on pourrait penser que **FP** est un problème assez banal. Et pourtant, on le retrouve fréquemment dans des endroits les plus inattendus. Il se trouve que la connaissance du nombre de Frobenius est très utile pour l'étude de beaucoup d'autres problèmes (voir par exemple la sous-section 1.3.3 pour une application à un problème de *pavages*). L'étude et la compréhension de ce problème ont été l'objet de nombreux articles de recherche. De nombreuses méthodes (de divers domaines mathématiques) ont été utilisées pour essayer de trouver une formule ou un algorithme permettant de calculer le nombre de Frobenius.

J'ai écrit un livre [31] qui constitue un recueil de ces méthodes, idées, points de vue et applications destiné à un large public et qui met en exergue ce qui est connu à ce jour sur **FP**.

#### 1.3.1 La complexité du nombre de Frobenius

J'ai démontré [17] que **FP** est  $\mathcal{NP}$ -difficile en général.

**Théorème 1.3.1** [17] **FP** est  $\mathcal{NP}$ -difficile en utilisant les réductions de Turing.

Le problème du sac-à-dos **SD** qui est  $\mathcal{NP}$ -complet [49, page 376], est le suivant : étant donnés des entiers positifs  $a_1, \dots, a_n$  et  $t$ , existe-t-il des entiers  $x_i \geq 0$ ,  $1 \leq i \leq n$  tels que  $\sum_{i=1}^n x_i a_i = t$  ?

Dans [17], j'ai démontré que la procédure ci-dessous, qui utilise une sous-procédure hypothétique pour résoudre **FP**, trouve une solution à **SD** en temps polynomial. On suppose que  $r = p.g.c.d.(a_1, \dots, a_n) = 1$ , sinon on considère **SD** avec  $a'_i = \frac{a_i}{r}$ ,  $i = 1, \dots, n$  et  $t' = \frac{t}{r}$ .

Procédure
<p>Trouver <math>g(a_1, \dots, a_n)</math>  <b>si</b> <math>t &gt; g(a_1, \dots, a_n)</math> <b>alors</b> <b>SD</b> admet une réponse positive  <b>sinon</b>              <b>si</b> <math>t = g(a_1, \dots, a_n)</math> <b>alors</b>                  <b>SD</b> admet une réponse positive              <b>sinon</b>                  Trouver <math>g(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, \bar{a}_{n+1})</math> avec <math>\bar{a}_i = 2a_i</math>, <math>i = 1, \dots, n</math> et                  <math>\bar{a}_{n+1} = 2g(a_1, \dots, a_n) + 1</math> (remarquer que <math>p.g.c.d.(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}) = 1</math>)                  Trouver <math>g(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}, \bar{a}_{n+2})</math> avec <math>\bar{a}_{n+2} = g(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}) - 2t</math>                  <b>SD</b> admet une réponse positive si et seulement si <math>g(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n+2}) &lt; g(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n+1})</math></p>

### 1.3.2 Semi-groupe de Fibonacci

J'ai montré [1] l'existence d'une formule pour certains *semi-groupes de Fibonacci*. Un semi-groupe de Fibonacci est un semi-groupe engendré par un ensemble de nombres *Fibonacci*  $F_{i_1}, \dots, F_{i_r}$ ,  $3 \leq i_1 < \dots < i_r$  avec  $p.g.c.d.(F_{i_1}, \dots, F_{i_r}) = 1$ .

**Théorème 1.3.2** [1] Soit  $i, k \geq 3$  des entiers et soit  $r = \lfloor \frac{F_i - 1}{F_k} \rfloor$ . Alors,

$$g(F_i, F_{i+2}, F_{i+k}) = \begin{cases} (F_i - 1)F_{i+2} - F_i(rF_{k-2} + 1) & \text{si } r = 0 \text{ ou } r \geq 1 \text{ et} \\ & F_{k-2}F_i < (F_i - rF_k)F_{i+2}, \\ (rF_k - 1)F_{i+2} - F_i((r - 1)F_{k-2} + 1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

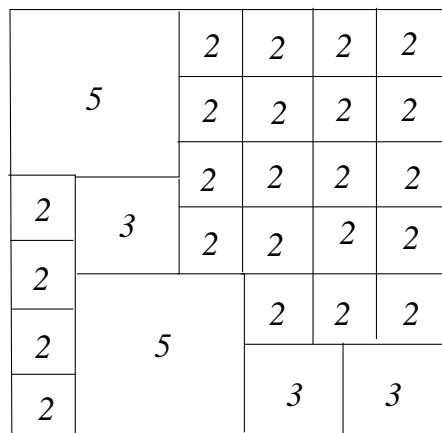


FIG. 1.2 – Pavage du carré  $(13 \times 13)$  avec  $(2 \times 2)$ ,  $(3 \times 3)$  et  $(5 \times 5)$ .

**Observation 1.3.3** Dans [31, Appendix A], je propose plus de 40 conjectures et problèmes sur le nombre de Frobenius ainsi que sur des questions y étant associées.

### 1.3.3 Pavages d'un rectangle et du tore

On dira qu'un rectangle  $(a \times b)$  peut être *pavé* par un ou plusieurs rectangles si  $(a \times b)$  est complètement recouvert par des copies (des translations) de l'ensemble de rectangles donnés tel que les intérieurs des copies sont deux à deux disjoints, voir les figures 1.2 et 1.3.

Considérons la question suivante :

**Question 1.3.4** Soient  $a, b, x_1, x_2, y_1, y_2$  des entiers. Existe-t-il une fonction  $C = C(x_1, x_2, y_1, y_2)$  telle que si  $a, b \geq C$  alors  $(a \times b)$  peut être pavé avec  $(x_1 \times x_2)$  et  $(y_1 \times y_2)$  ?<sup>2</sup>

En appliquant le nombre de Frobenius, j'ai montré [23] des résultats liés à la question 1.3.4.

**Théorème 1.3.5** [23] Soit  $1 < p_1 < \dots < p_{n+1}$  des entiers deux à deux premiers. Alors, le carré  $(\underbrace{a \times \dots \times a}_n)$  peut être pavé par

---

<sup>2</sup>Le cas particulier quand  $x_1 = 4, x_2 = 6, y_1 = 5$  et  $y_2 = 7$  a été proposé par le William Mowell Putnam Examination (Problem B-3) de 1991.

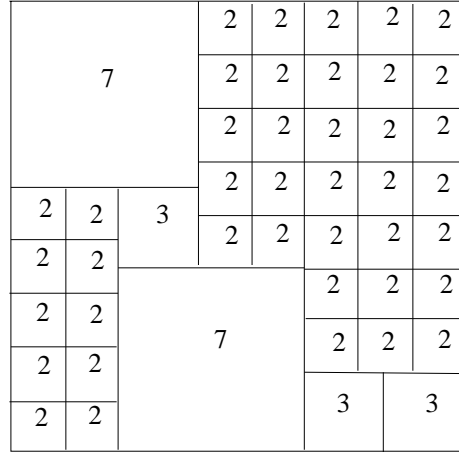


FIG. 1.3 – Pavage du rectangle  $(17 \times 17)$  avec  $(2 \times 2)$ ,  $(3 \times 3)$  et  $(7 \times 7)$ .

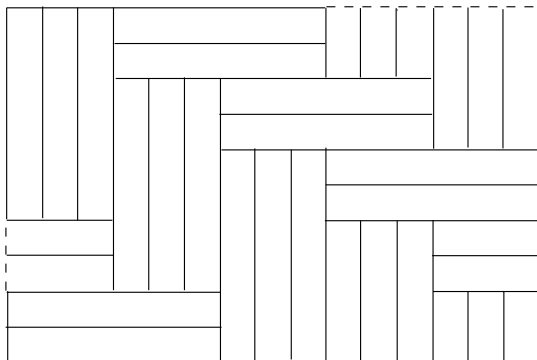
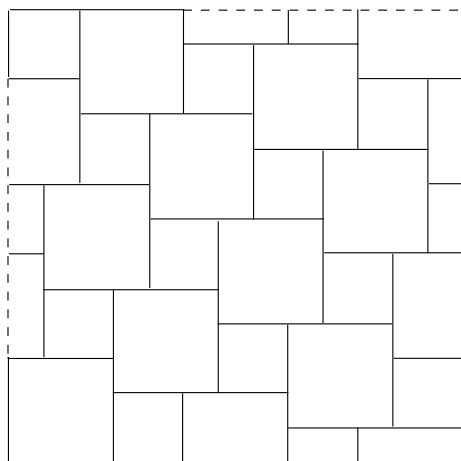
$$\underbrace{(p_1 \times \cdots \times p_1)}_n, \dots, \underbrace{(p_{n+1} \times \cdots \times p_{n+1})}_n \text{ si}$$

$$a > n \prod_{i=1}^{n+1} p_i - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{p_1 \cdots p_{n+1}}{p_i}.$$

J’ai d’autre part étudié les pavages pour le *tore*  $T(A, B)$  (2-dimensionnel représenté par un rectangle et en identifiant ses côtés de manière traditionnelle) par des copies d’un ou plusieurs rectangles, voir les figures 1.4 et 1.5. Je me suis tout particulièrement intéressé à la question suivante : est-il vrai que si  $A$  et  $B$  sont assez grands alors le tore  $T(A, B)$  peut être pavé par les copies de deux rectangles donnés ? En utilisant le nombre de Frobenius, dans [23] ont été démontrés les deux théorèmes suivants :

**Théorème 1.3.6** [23] *Soient  $u, v, x$  et  $y$  des entiers tels que  $p.g.c.d.(u, x) = p.g.c.d.(u, y) = p.g.c.d.(v, x) = p.g.c.d.(v, y) = 1$  et soient  $r_1$  et  $r_2$  deux rectangles de tailles  $(u \times v)$  et  $(x \times y)$  respectivement. Alors, le tore  $T(A, B)$  est pavable par  $r_1$  et  $r_2$  si  $A, B \geq \min\{n_1 d + 1, n_2 d + 1\}$  où  $d = uv + xy$ ,  $n_1 = \max\{vx, uy\}$  et  $n_2 = \max\{ux, vy\}$ .*

**Théorème 1.3.7** [23] *Soient  $u, v, x$  et  $y$  des entiers, et soit  $r_1$  et  $r_2$  deux rectangles de tailles  $(u \times v)$  et  $(x \times y)$  respectivement. Alors, il existe un entier  $C$  tel que pour tout  $A, B \geq C$ , le tore  $T(A, B)$  est pavable par  $r_1$  et  $r_2$  si et seulement si  $p.g.c.d.(u, x) = p.g.c.d.(u, y) = p.g.c.d.(v, x) = p.g.c.d.(v, y) = 1$ .*

FIG. 1.4 – Pavage du tore  $T(15, 10)$  avec  $(1 \times 6)$ .FIG. 1.5 – Pavage du tore  $T(13, 13)$  avec  $(2 \times 2)$  et  $(3 \times 3)$ .

**Problème 1.3.8** *Utiliser la même technique que ci-dessus pour étudier problème de pavage du même genre mais en considérant des objets différents tels que l'espace projectif ou la ruban de Möbius ainsi que pour une généralisation multidimensionnelle.*

## 1.4 Semi-groupes

Un *semi-groupe*  $(S, *)$  consiste en un ensemble non vide  $S$  et en une opération binaire associative  $*$  sur  $S$ . Je me suis intéressé au semi-groupe *numérique* engendré par  $a_1, \dots, a_n$  (noté par  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ ), c'est-à-dire, l'ensemble de tous les entiers qui ont une combinaison linéaire de  $a_1, \dots, a_n$  à coefficients positifs. J'ai notamment étudié les *trous* d'un semi-groupe à savoir les entiers appartenant à  $\mathbb{N} \setminus S$ . Remarquons que le plus grand trou d'un semi-groupe est exactement le nombre de Frobenius de  $S$  (qui est aussi quelquefois appelé le *conducteur* de  $S$ ).

J'ai donné [21] une formule pour les trous quand le semigroupe consiste de  $k$  entiers consécutifs.

**Théorème 1.4.1** [21] *Soit  $a, k \geq 1$  des entiers et soit  $S = \langle a, a+1, \dots, a+k \rangle$  un semigroupe avec trous  $l_1 < \dots < l_{N(S)}$ . Soit  $v_m = (m+1)(a-1) - k \binom{m(m+1)}{2}$ ,  $v_{-1} = 0$  et  $r = \lfloor \frac{a-2}{k} \rfloor$ . Alors,*

$$N(S) = v_r \text{ and } l_i = t_i(a+k) + i - v_{t_i-1}$$

*pour chaque  $i = 1, \dots, N(S)$  où  $t_i$  est le plus petit entier tel que  $v_{t_i} \geq i$ .*

En utilisant une approche géométrique, j'ai étudié [21] le comportement des trous dans quelques semi-groupes. J'ai utilisé le célèbre théorème de Pick <sup>3</sup> pour démontrer le théorème suivant :

**Théorème 1.4.2** [21] *Soient  $p, q$  des entiers positifs tels que  $p.g.c.d.(p, q) = 1$ . Soit  $g_k(\langle p, q \rangle)$  le nombre de trous de  $\langle p, q \rangle$  dans l'intervalle*

$$[pq - (k+1)(p+q), \dots, pq - k(p+q)],$$

---

<sup>3</sup>Le théorème de Pick [50] est considéré comme un bijou des mathématiques élémentaires. Ce théorème affirme que l'aire d'un polygone simple  $S$ , avec tous ses sommets à coordonnées entiers, est donnée par  $I(S) + B(S)/2 - 1$  où  $I(S)$  et  $B(S)$  correspondent au nombre de points à coordonnées entières à l'intérieur et sur le bord de  $S$  respectivement.

pour chaque  $0 \leq k \leq \lfloor \frac{pq}{p+q} \rfloor - 1$ . Alors,

$$g_k(\langle p, q \rangle) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = 0 \\ 2(k+1) + \lfloor \frac{kq}{p} \rfloor + \lfloor \frac{kp}{q} \rfloor & \text{if } 1 \leq k \leq \lfloor \frac{pq}{p+q} \rfloor - 1. \end{cases}$$

**Problème 1.4.3** *Etudier les trous d'un semi-groupe avec  $n \geq 3$ , en établissant un lien entre un polytope construit à partir des éléments du semi-groupe et le polynôme d'Ehrhart associé à ce polytope (on rappelle que ce polynôme est une généralisation du théorème de Pick qui permet de dénombrer les points à coordonnées entières qui se trouvent à l'intérieur d'un polytope[34, Chapitre 8]).*

J'ai aussi étudié le *genus* d'un semi-groupe  $S$ , noté par  $N(S) = N(a_1, \dots, a_n)$  (c'est-à-dire,  $N(S) = \#(\mathbb{N} \setminus S)$ ) de certaine familles de semi-groupes [22].

**Théorème 1.4.4** [1] *Soit  $i, k \geq 3$  des entiers et soit  $r = \lfloor \frac{F_i-1}{F_k} \rfloor$ . Alors,*

$$N(F_i, F_{i+2}, F_{i+k}) = \frac{(F_i - 1)(F_{i+2} - 1) - rF_{k-2}(2F_i - F_k(1 + r))}{2}.$$

où  $F_i$  note le  $i$ -ème nombre de Fibonacci.

Soit  $g$ , un entier, et  $n_g$ , le nombre de semi-groupes avec un ensemble minimal de générateurs (et donc unique d'après [44]) et *genus*  $g$ . Dans [37], Bras-Amorós a étudié le comportement de  $n_g$ , démontré que  $n_g \geq n_{g-1} + n_{g-2}$  pour tout  $2 \leq g \leq 49$  et conjecturé que cette inégalité est vraie pour tout entier  $g$ . J'ai travaillé sur la conjecture avec l'approche suivante : soit  $k$ , un entier positif, et  $n_g^k$  le nombre de semi-groupes différents de *genus*  $g$  et avec  $k$  générateurs minimaux.

**Question 1.4.5** *Est-il vrai que  $n_g^k \geq n_{g-1}^k + n_{g-2}^k$  pour tout entier  $k \geq 1$  ?*

Il apparaît évident qu'une réponse positive à cette question implique une réponse positive à la conjecture. Malheureusement, la réponse est négative. En effet, j'ai démontré [22] que la question 1.4.5 n'est pas vraie même pour  $k = 2$ . J'ai également posé la question suivante :

**Question 1.4.6** *Existe-t-il une formule pour calculer  $n_g^2$  ?*

J'ai répondu à cette question si  $g \geq 2$  est un premier.

**Théorème 1.4.7** [22] *Soit  $p_n$  le  $n$ ème nombre premier. Alors,*

$$n_{p_n}^2 = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

# Chapitre 2

## Géométrie Discrète et Convexe

Dans ce chapitre, je présente mes travaux de recherche sur des problèmes qui portent sur la géométrie discrète et convexe, notamment sur des problèmes liés aux matroïdes orientés et aux arrangements d'hyperplans.

La structure des *matroïdes* a été introduite par H. Whitney en 1935 en retenant les principales propriétés combinatoires de la dépendance linéaire dans les espaces vectoriels. Depuis lors, ils ont été vus comme la généralisation de plusieurs structures classiques provenant de divers domaines comme la géométrie combinatoire, la théorie des graphes et l'optimisation discrète, où ils se sont imposés dans la modélisation de nombreux problèmes. Depuis une dizaine d'années, les matroïdes apparaissent dans des branches plus éloignées des mathématiques, notamment en algèbre avec des applications à la stratification des grassmanniennes, sous l'impulsion des travaux de I.M. Gelfand et (plus récemment) de L. Lafforgue. Dans les années 1970, la notion de *matroïdes orientés* a été introduite par plusieurs auteurs [36]. Dans un esprit analogue à celui des matroïdes, cette structure plus fine est fondée sur l'algèbre des *signes* dans les espaces vectoriels sur les corps ordonnés. Les applications les plus directes des matroïdes orientés portent sur la convexité, la programmation linéaire et la géométrie discrète.

### 2.1 Codages de matroïdes orientés

Soit  $n, r$  des entiers positifs avec  $n > r$  et soit  $U_{n,r}$  le matroïde orienté *uniforme* ayant comme base (et comme circuits) tout les sous-ensembles à  $r$  éléments (tout les sous-ensembles à  $r + 1$  éléments).

Considérons le problème suivant lié aux *codages minimaux* des matroïdes.

orientés : quel est le plus petit nombre de circuits, noté par  $s(n, r)$ , qui sont suffisants pour déterminer  $U_{n,r}$  ? Hamidoune et Las Vergnas [46] ont montré que  $s(n, r) \leq \binom{n-1}{r}$ .

J'ai donné plusieurs bornes supérieures pour  $s(n, r)$ . Afin de déterminer ces bornes, ont été utilisés les *recouvrements connexes* des bases du matroïde orienté par ses circuits. Plus précisément, il a été défini qu'un *recouvrement* est un sous-ensemble de circuits tel que chaque base est contenue dans au moins un des circuits. On dit que le recouvrement est *connexe* s'il n'admet pas une partition  $A$  et  $B$  tel que  $W_A \cap W_B = \emptyset$  où

$$W_A = \{ \text{les bases contenues dans l'un des circuits de } A \}$$

et

$$W_B = \{ \text{les bases contenues dans l'un des circuits de } B \}.$$

Soit  $R(n, r)$  et  $RC(n, r)$ , un recouvrement et un recouvrement connexe respectivement de  $U_{n,r}$ . Il a été démontré [12, Theorem 2.1] que  $s(n, r) \leq RC(n, r)$ , autrement dit, que les signes des circuits qui se trouvent dans le recouvrement, sont suffisants pour déterminer les signes des bases du matroïde orienté uniforme.

En utilisant ces définitions, j'ai donné [12] plusieurs bornes supérieures qui améliorent la borne proposée par Hamidoune et Las Vergnas.

**Théorème 2.1.1** [12] *Soit  $n, r$  des entiers positifs avec  $n > r$ . Alors,*

$$(a) \quad RC(n, r) \leq \sum_{\substack{i=2 \\ i \text{ - pair}}}^{2\lfloor (n-r+1)/2 \rfloor} \binom{n-i}{r-1} + \lfloor \frac{n-r}{2} \rfloor,$$

$$(b) \quad RC(n, r) \leq (\binom{n}{r} - 1)/r,$$

$$(c) \quad RC(n, r) \leq 2R(n, r).$$

Par ailleurs, le recouvrement connexe en relation avec les *nombre de Turán*<sup>1</sup> a été étudié en obtenant le résultat suivant :

---

<sup>1</sup>Les nombres de Turán  $T(n, l, r)$  est le plus petit nombre de sous-ensembles à  $r$  éléments de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  tel que chaque sous-ensemble à  $l$  élément contient au moins un de ces sous-ensembles à  $r$  éléments.

**Théorème 2.1.2** [12]

$$RC(n, r) = \left( \binom{n}{r} / r \right) (1 + o(1))$$

où  $r$  est fixé et  $n \rightarrow \infty$ .

Dans [3], la question de savoir si la connexité d'un recouvrement est une condition nécessaire pour déterminer les bases d'un matroïde orienté a été posée.

**Question 2.1.3** Soit  $R$  un recouvrement qui détermine  $U_{n,r}$ ,  $R$  est-il connexe ?

Il a été démontré que ceci n'est pas forcément vrai. Pour ce faire, la question suivante a été considérée :

**Question 2.1.4** Soit  $R$  un recouvrement non connexe de  $U_{n,r}$ , ayant deux composantes connexes  $R_1$  et  $R_2$ . On suppose que  $R_1$  et  $R_2$  contiennent les bases  $B_1$  et  $B_2$  respectivement (et que l'ensemble de bases de  $U_{n,r}$  est  $B_1 \cup B_2$ ). Existe-t-il un matroïde orienté uniforme  $U$  avec une orientation de ses bases donnée par  $\Phi$  telle que :

$$\Phi'(B) = \begin{cases} \Phi(B) & \text{si } B \in B_1, \\ -\Phi(B) & \text{sinon.} \end{cases}$$

soit également l'orientation des bases d'un autre matroïde orienté uniforme  $U'$  ?

Autrement dit, existe-t-il deux matroïdes orientés ayant comme *mutations* le même ensemble de bases donné ? Remarquons qu'une réponse négative à la question 2.1.4 implique une réponse négative à la question 2.1.3. Dans [3] la question 2.1.4 a été répondue négativement.

**Théorème 2.1.5** [3] Soit  $n \geq 8$  un entier positif et soient

$$R_1 = \{(1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 5), (1, 2, 4, 6), (1, 3, 5, 6)\}$$

et

$$R_2 = SU\{(1, 4, 5, 7), (2, 3, 6, 7), (2, 4, 5, 7), (2, 5, 6, 7), (3, 4, 5, 7), (3, 4, 6, 7), (4, 5, 6, 7)\}$$

où  $S = \{(i_1, i_2, j + 1, j + 2) : 1 \leq i_1 < i_2 \leq j, 6 \leq j \leq n - 2\}$ . Alors,  $R(n, 3) = R_1 \cup R_2 \cup S$  est un recouvrement non connexe de  $U_{n,3}$ . De plus, il n'existe pas deux matroïdes orientés  $U_1$  et  $U_2$  (non isomorphes) tels que les seules mutations de  $U_i$ ,  $i = 1, 2$  sont les bases contenues dans l'un des circuits dans  $R_2$ .

On remarque que le recouvrement donné dans ce théorème n'améliore pas ceux qui sont donnés par le théorème 2.1.1.

**Question 2.1.6** *Existe-t-il des recouvrements non connexes qui améliorent les bornes supérieures pour  $s(n, 3)$ ,  $n \geq 8$  du théorème 2.1.1 ?*

Dans [3] ont également été donnés des recouvrements non connexes  $R$  de  $U_{n,3}$  tels que les signes du circuits de  $R$  ne déterminent pas les signes des bases du matroïde orienté.

## 2.2 Arrangements d'hyperplans

Un  $d$ -arrangement euclidien (et projectif)  $A$  de  $n$  hyperplans est une collection finie d'hyperplans dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^d$  (espace projectif réel  $\mathbb{P}^d$ ) tel qu'aucun point appartient à tous les hyperplans. Un arrangement décompose l'espace  $\mathbb{R}^d$  ( $\mathbb{P}^d$ ) dans un complexe  $K$  des cellules  $d$ -dimensionnelles. On appellera les *régions* de  $A$ , les cellules  $d$ -dimensionnelles de  $K$  et les *faces* de  $A$ , les cellules  $(d - 1)$ -dimensionnelles de  $K$ . Une cellule  $d$ -dimensionnelle simplicial (c'est-à-dire, une région avec exactement  $d + 1$  faces) de  $A$  est appelée *simplexe*. Les simplexes sont des cellules de dimension complète le plus simple possible et donc d'intérêt basique. En outre, les simplexes dans des arrangements simples correspondent aux possibles déformations locales appelées *switchings* ou *mutations*. Une région est dite *complète* si elle est bornée par tous les hyperplans de l'arrangement.

Finalement, d'après la représentation topologique (de Falkman et Lawrence [36]) d'un matroïde orienté, on sait qu'un arrangement de  $n$  hyperplans dans  $\mathbb{P}^d$  est combinatoirement équivalent à un matroïde orienté *acyclique* à  $n$  éléments de rang  $r = d + 1$ . En utilisant cette équivalence, j'ai étudié plusieurs problèmes géométriques.

### 2.2.1 Problème de McMullen

P. McMullen a posé le problème suivant : déterminer le plus grand entier  $n = f(d)$  tel que pour tout ensemble de  $n$  points, en position générale dans l'espace affine de dimension  $d$ , il existe une transformation projective qui applique bijectivement les  $n$  points aux sommets d'un polytope convexe de dimension  $d$ .

D. Larman [45] a montré que  $2d + 2 \leq f(d) \leq (d + 1)^2$  et conjecturé que la valeur optimale est précisément  $f(d) = 2d + 2$ . Larman a montré que la conjecture est vraie pour  $d = 2, 3$ . Il est aussi connu que la conjecture est vraie pour  $d = 4$ .

La généralisation suivante de ce problème en termes de matroïdes orientés a été proposée par Cordovil et da Silva [42] : déterminer le plus grand entier  $n = g(r)$  tel que tout matroïde orienté uniforme de rang  $r$  admet une réorientation acyclique sans points intérieurs.

Le problème de McMullen est un cas particulier de cette généralisation qui considère les matroïdes orientés uniformes acycliques de rang  $r$ . Ces derniers correspondent aux matroïdes orientés associés aux ensembles de points dans  $\mathbb{R}^d$  en position générale avec  $r = d + 1$  et dans ce cas, une transformation projective correspond à une réorientation acyclique et inversement. En utilisant cette généralisation, j'ai amélioré [5] la borne supérieure (linéaire en  $d$ ).

**Théorème 2.2.1** [5] *Pour tout  $d \geq 4$ , on a  $f(d) \leq 2d + \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$ . Autrement dit, il existe un ensemble de  $2d + \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$  points dans  $\mathbb{R}^d$  en position générale pour lequel il n'existe aucune transformation projective aux sommets d'un polytope convexe de dimension  $d$ .*

Afin de démontrer ce théorème, j'ai utilisé des classes particulières de matroïdes orientés appelés  $\gamma$ -matroïdes orientés (voir sous-section 2.2.3 pour plus de détails sur cette classe). Je pense que la borne donnée pour  $f(d)$  ne peut pas être améliorée en utilisant les  $\gamma$ -matroïdes orientés.

**Problème 2.2.2** *Améliorer la borne supérieure de  $f(d)$  donnée par le théorème 2.2.1 pour  $d \geq 5$ .*

### 2.2.2 Problème de Grünbaum

Un *arrangement de pseudodroites*  $\mathcal{A}$  est une collection finie de  $n \geq 3$  courbes simples fermées dans l'espace projectif 2-dimensionnel tel que toutes paires des courbes ont exactement un point en commun où elles se croisent. Un arrangement  $\mathcal{A}$  est dit *simple* si aucun point n'appartient à plus de deux pseudodroites. Un arrangement décompose le plan en régions 2-dimensionnelles. Une région à trois faces est appelée un *triangle* et le nombre de triangles d'un arrangement  $\mathcal{A}$  est noté par  $p_3(\mathcal{A})$ , voir la Figure 2.1.

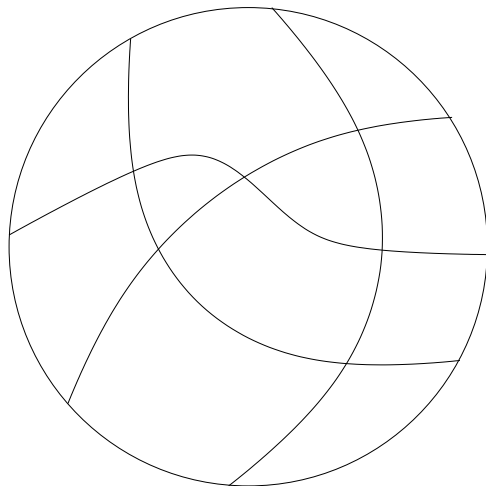


FIG. 2.1 – Arrangement simple  $\mathcal{A}$  à 5 pseudodroites (une des droites est représentée par l'infini) avec  $p_3(\mathcal{A}) = 5$ .

On sait que  $p_3(\mathcal{A}) \leq \frac{1}{3}n(n-1)$  pour tout arrangement simple  $\mathcal{A}$  à  $n \geq 4$  pseudodroites. Un arrangement  $\mathcal{A}$  est dit  *$p_3$ -maximal* si  $p_3(\mathcal{A}) = \frac{1}{3}n(n-1)$ , voir la Figure 2.2.

Il existe des méthodes récurrentes pour construire un arrangement simple  $p_3$ -maximal avec  $2(n-1)$  pseudodroites à partir d'un arrangement  $p_3$ -maximal avec  $n$  pseudodroites [53]. B. Grünbaum [36, pp. 279] proposa la question suivante :

**Question 2.2.3** *Existe-t-il une infinité d'arrangements  $p_3$ -maximale de droites ?*

J'ai apporté [13] une réponse positive à cette question.

**Théorème 2.2.4** [13] *Il existe une famille infinie d'arrangements  $p_3$ -maximale de droites.*

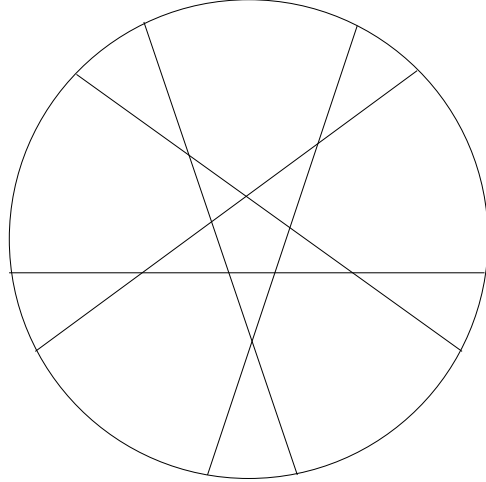


FIG. 2.2 – Arrangement simple  $\mathcal{A}$  à 6 droites (une des droites est représentée par l'infini)  $p_3$ -maximal.

### Arrangements cycliques

Le polytope *cyclique* de dimension  $d$  à  $n$  sommets,  $C_d(n) = C_d(t_1, \dots, t_n)$ , a été découvert par Carthéodory [41]. Il est défini par l'enveloppe convexe, dans  $\mathbb{R}^d$   $d \geq 2$ , d'un ensemble de  $n \geq d + 1$  points différents  $x(t_1), \dots, x(t_n)$  de la *courbe de moment*  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $t \rightarrow (t, t^2, \dots, t^d)$ . Le polytope cyclique joue un rôle important dans la géométrie convexe combinatoire en raison de ses propriétés extrêmes. Par exemple, le *théorème de la borne supérieure* établi par McMullen [47], indique que le nombre de faces  $j$ -dimensionnel d'un polytope  $d$ -dimensionnel à  $n$  sommets est optimisé par  $C_d(t_1, \dots, t_n)$ .

Un arrangement *cyclique*  $A_d(n)$  est défini par le dual du polytope cyclique  $C_d(n)$ . Comme pour le polytope cyclique, les arrangements cycliques ont aussi des propriétés extrêmes. Par exemple, Shannon [56] a montré que  $A_d(n)$  a exactement  $n$  simplexes.

J'ai donné [7] une formule qui permet de compter de manière précise le nombre de régions à  $p$ -faces,  $f_p(A_d(n))$ , d'un arrangement cyclique.

**Théorème 2.2.5** [7] *Soit  $d, n, p$  des entiers positifs tels que  $d + 1 \leq p \leq n$ . Alors,*

$$f_p(A_d(n)) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{d-2} \binom{n-1}{i} + \binom{d}{n-d} + \binom{d-1}{n-d-1} & \text{si } p = n, \\ \binom{n-d-1}{n-p} \binom{d}{p-d} + \binom{n-d}{n-p} \binom{d-1}{p-d-1} & \text{si } p < n. \end{cases}$$

J.-P. Roudneff a conjecturé [52] que ce sont précisément les arrangements cycliques qui admettent le plus grand nombre de régions complètes. Plus spécifiquement, Roudneff a conjecturé que tout arrangement de  $n \geq 2d + 1 \geq 5$  (pseudo)hyperplans admet au plus  $\sum_{i=0}^{d-2} \binom{n-1}{i}$  régions complètes. On remarque que, d'après le théorème 2.2.5, cette valeur est atteinte par  $A_d(n)$ . Dans [9], j'ai montré que la conjecture de Roudneff est vraie pour  $d = 3$ .

**Théorème 2.2.6** [9] *Tout arrangement de  $n \geq 7$  (pseudo)hyperplans admet au plus 7 régions complètes.*

**Problème 2.2.7** *Etudier la conjecture de Roudneff qui est toujours ouverte pour  $d \geq 4$ .*

### 2.2.3 $\gamma$ -arrangements

Les  $\gamma$ -arrangements sont obtenus en utilisant la représentation topologique du  $\gamma$ -matroïdes orientés qui sont, à leur tour, naturellement construits par l'union des matroïdes de rangs 1. Les  $\gamma$ -arrangements ont des propriétés intéressantes. Par exemple, un  $\gamma$ -arrangement à  $n$  hyperplans admet exactement  $n$  simplexes ou encore cette famille contient les arrangements cycliques [52] comme cas particulier.

**Question 2.2.8** *La connaissance de l'ensemble de simplexes d'un arrangement  $A$  pour reconstruire  $A$  est-elle suffisante ?*

J'ai répondu [8] à cette question en apportant une réponse positive si  $A$  est un  $\gamma$ -arrangements.

**Théorème 2.2.9** [8] *On peut reconstruire n'importe quel  $\gamma$ -arrangement à partir de ses simplexes.*

J'ai également démontré [8] que la question 2.2.8 a une réponse positive si  $A$  est un arrangement simple 2-dimensionnel et  $p_3$ -maximal.

**Question 2.2.10** *Obtient-on une réponse positive à la question 2.2.8 si  $A$  est un arrangement simple 2-dimensionnel à  $n$  pseudodroites et avec exactement  $n$  triangles ?*

Soit  $G(A)$ , le graphe biparti avec les partitions  $S$ , les simplexes de  $A$ , et  $H$ , les hyperplans de  $A$  où  $s \in S$  est adjacent à  $h \in H$  si et seulement si l'hyperplan  $h$  est l'une des faces de  $s$ . On dira que  $G(A)$  est le graphe de simplexes de  $A$ .

**Question 2.2.11** *Existe-t-il une caractérisation du graphe biparti qui sont des graphes de simplexes d'un  $\gamma$ -arrangement ?*

Cette question a une réponse positive.

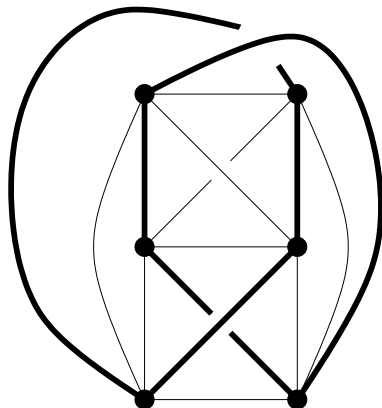
**Théorème 2.2.12** [8] *Un graphe biparti  $G = G(S, H)$   $r$ -régulier avec  $|S| = |H| = n$  est le graphe de simplexe d'un  $\gamma$ -arrangement à  $n$  hyperplans si et seulement si  $G$  admet un  $\Gamma$ -étiquetage.*

On croit que le  $\gamma$ -arrangement correspondant (dans le théorème 2.2.12) est unique.

**Conjecture 2.2.13** *Soit  $G = G(S, H)$  un graphe biparti  $r$ -régulier avec  $|S| = |H| = n$  qui admet un  $\Gamma$ -étiquetage. Alors, il existe un unique (à une permutation près)  $\gamma$ -arrangement à  $n$  hyperplans ayant  $G$  comme graphe de simplexes (remarquons que  $G$  peut être également le graphe de simplexes d'un autre non  $\gamma$ -arrangement). Autrement dit, il n'existe pas deux  $\gamma$ -arrangements (non isomorphes)  $A_1$  et  $A_2$  tels que  $G(A_1)$  soit isomorphe à  $G(A_2)$ .*

**Question 2.2.14** *Soit  $G(A)$  le graphe biparti d'un arrangement  $A$  simple 2-dimensionnel à  $n$  pseudodroites.  $G(A)$  est-il connexe ? Ou peut être, est-il 2-connexe ?*

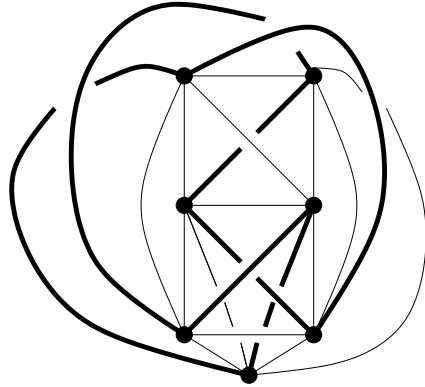
**Problème 2.2.15** *Etudier l'ensemble des simplexes d'un arrangement d'hyperplans définis par l'union de matroïdes orientés de rangs  $r \geq 2$ .*

FIG. 2.3 – Un  $R(K_6)$  avec un entrelacet de Hopf.

## 2.3 Nœuds dans des graphes spatiaux

Un *entrelacet* est un ensemble de courbes simples, fermées, disjointes dans  $\mathbb{R}^3$ . Un entrelacet avec une seule composante est appelé *nœud*. On dira que deux entrelacets  $L$  et  $L'$  sont *isotopes* si l'on peut transformer  $L$  en  $L'$  en déformant continuellement l'espace (voir [48] pour les définitions et la terminologie sur la théorie des nœuds). Un *diagramme* d'un entrelacet  $L$  est la projection de  $L$  dans le plan où deux courbes (qui ne représentent pas nécessairement deux composantes différentes) se croisent (transversalement) en un point. A chaque croisement, il sera spécifié quelle courbe passe par dessous et quelle autre passe par dessus. Le nœud est dit *trivial* s'il admet un diagramme sans croisement. Le *nombre de batons*,  $s(L)$ , d'un entrelacet  $L$  est le plus petit nombre de batons nécessaires pour représenter  $L$  en  $\mathbb{R}^3$ , voir la figure 2.8.

Une représentation *spatiale*  $R(G)$  d'un graphe  $G$  est un plongement de  $G$  dans l'espace 3-dimensionnel, c'est-à-dire, les sommets de  $G$  sont des points distincts en  $\mathbb{R}^3$  et les arêtes sont représentées par des courbes de Jordan simples telles que deux courbes sont, soit disjointes, soit croisées à l'une de leurs extrémités. Ici, nous considérons que des représentations spatiales *tame*, c'est-à-dire, des représentations spatiales qui ont des arêtes linéaires (disjointes par morceau). Les cycles dans  $R(G)$  peuvent être considérés comme des courbes simples fermées dans  $\mathbb{R}^3$ . En conséquence, ils peuvent être considérés comme des entrelacets en  $\mathbb{R}^3$ . Un graphe *complet*,  $K_n$ , à  $n$  sommets est un graphe où toute pair de sommets est reliée par une arête. Il est connu [43, 55] que tout

FIG. 2.4 – Un  $R(K_7)$  avec un trefoil.

$R(K_6)$  admet deux triangles isotopes à l'entrelacet de Hopf, voir la figure 2.3.

L'étude de la dépendance (ou l'indépendance) du type d'entrelacet, dans la structure abstraite du graphe  $G$  lui-même plutôt que de la représentation spatiale de  $G$ , constitue un sujet de recherche récent.

L'étude et la compréhension de ce sujet ont engendrés de nombreux travaux de recherche. J'ai écrit un article [2] qui constitue un recueil des résultats connus à ce jour sur le sujet.

Considérons la question suivante : quel est le plus petit entier  $r = r(L)$  tel que toute représentation spatiale  $R(K_n)$  avec  $n \geq r$  contient des cycles isotopes à l'entrelacet  $L$ ?<sup>2</sup> Il est connu [43] que  $r(\text{trefoil}) = 7$ , voir la figure 2.4.

Je me suis intéressé à la variante suivante : quel est le plus petit entier  $\bar{r} = \bar{r}(L)$  tel que toute représentation spatiale *linéaire*  $R(K_n)$  (une représentation où les arêtes sont des segments de droites) avec  $n \geq \bar{r}$  contient des cycles isotopes à l'entrelacet  $L$ ? D'après les résultats de [43, 55], on obtient que tout  $R(K_6)$  linéaire admet deux triangles isotopes à l'entrelacet d'Hopf, voir la figure 2.5.

En utilisant la théorie des matroïdes orientés, j'ai établi [11] que 7 points engendrent toujours le trefoil ou son *miroir*.

**Théorème 2.3.1** [11] *Toute représentation spatiale linéaire  $R(K_7)$  admet*

---

<sup>2</sup>Remarquons qu'il est possible de reformuler cette question comme suit : quel est le plus petit nombre entier  $n$  tel que tout ensemble de  $n$  points en position générale dans l'espace engendre un type d'entrelacet donné?

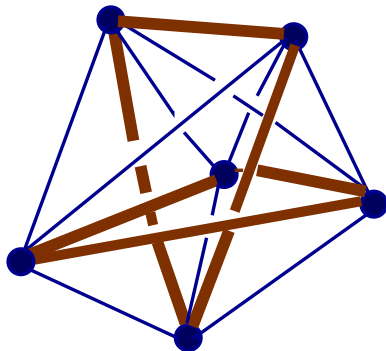


FIG. 2.5 – Un  $R(K_6)$  linéaire avec un entrelacet d'Hopf.

*un cycle isotope soit au trefoil, soit à son miroir.*

On sait que  $s(4_1^2) \geq 7$  (le nombre de batons de  $4_1^2$  est 7, voir la figure 2.8) et on peut donc se demander si en fait  $\bar{r}(4_1^2) = 7$ . J'ai montré [6] l'existence de 7 points non contenant  $4_1^2$  (le deuxième entrelacet non trivial).

**Théorème 2.3.2** [6]  $\bar{r}(4_1^2) > 7$

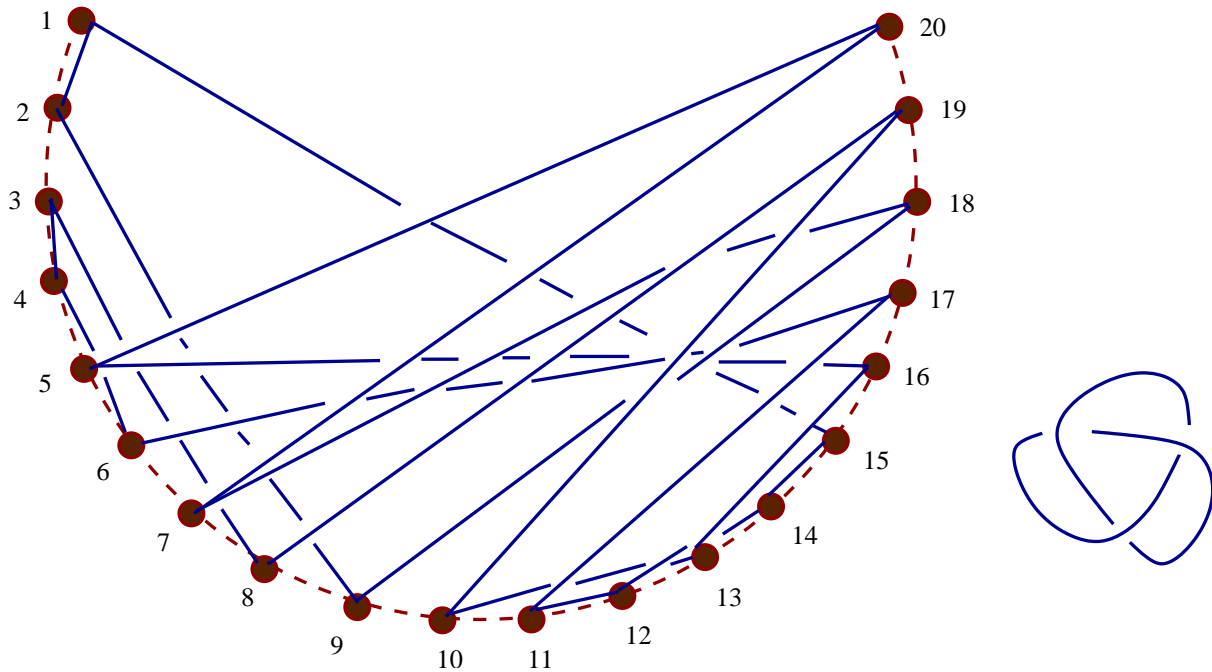
Récemment, j'ai étudié le plongement des nœuds dans les sommets du polytope cyclique 3-dimensionnel  $C_3(m)$ . Plus précisément, j'ai considéré une suite d'un sous-ensemble de sommets de  $C_3(m)$ , disons  $s_1, \dots, s_k$ ,  $1 \leq k \leq m$  et construit le cycle engendré par l'ensemble des segments  $[s_i, s_{i+1}]$ . Il est clair que si  $m$  est suffisamment grand alors  $C_3(m)$  aura un cycle isotope à un nœud donné. Dans [24], j'ai donné une borne linéaire pour  $m$ .

**Théorème 2.3.3** [24]  $C_3(6n)$  contient un cycle isotope au nœud  $K$  qui peut être représenté par un diagramme à  $n$  croisements.

En fait, j'ai présenté une méthode (simple) pour trouver le cycle désiré. Une telle représentation de  $K$  est appelée un *plongement cyclique* de  $K$ . En conséquence, d'après le théorème, le trefoil admet un plongement cyclique dans  $C_3(18)$ , voir la figure 2.6.

Mais, en fait, on peut faire mieux, en plongeant le trefoil dans  $C_3(7)$ , voir la figure 2.7.

**Question 2.3.4** *La borne pour le nombre de sommets du théorème 2.3.3 peut-elle être améliorée ?*

FIG. 2.6 – Plongement cyclique du trefoil dans  $C_3(18)$ .

Le théorème 2.3.3 et un argument du type *Ramsey* impliquent le théorème suivant :

**Théorème 2.3.5** [24] *Soit  $D(L)$  un diagramme de l'entrelacet  $L$  avec  $n$  croisements. Alors,*

$$\bar{r}(L) \leq 2^{2^{6n}}$$

Bien que cette borne soit double-exponentielle, elle est quand même explicite, ce qui n'était pas connu avant mes travaux. Dans le même papier, j'ai également démontré le théorème suivant :

**Théorème 2.3.6** [24]  $\bar{r}(T(5, 2)), \bar{r}(F_8) > 8$ .

La théorie des nœuds est vaste et de nombreux problèmes restent inexplorés à ce jour. C'est le cas par exemple, du *problème de dénouage* qui consiste à décider si un nœud donné est trivial ou pas. Ce problème est l'une des questions algorithmiques fondamentales de la théorie des nœuds et il n'existe tou-

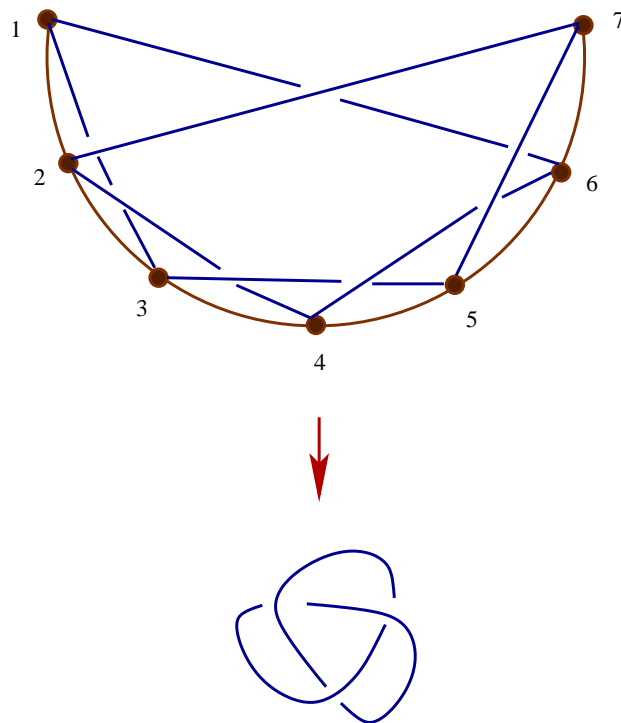


FIG. 2.7 – Plongement cyclique du trefoil dans  $C_3(7)$ .

jours pas d'algorithme de dénouage suffisamment simple et efficace pour être programmé<sup>3</sup> (voir [27] pour un résumé des résultats concernant ce problème).

Les plongements cycliques pourraient permettre d'explorer les nœuds dans l'espace sans passer par leurs diagrammes (représentation plane), ce qui serait une approche complètement nouvelle.

**Problème 2.3.7** *Etudier le lien entre les plongements cycliques et les invariants algébriques tels que les polynômes de Jones, Hoffman, etc.*

---

<sup>3</sup>Une application fondamentale d'un tel algorithme est dans l'étude de l'ADN pour caractériser les *enzymes* en termes de familles de nœuds produites

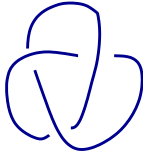
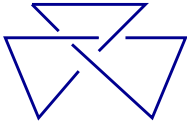

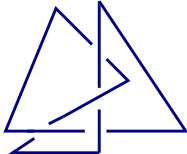
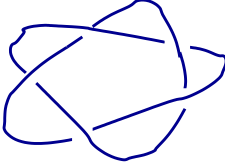
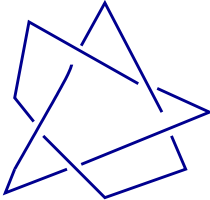

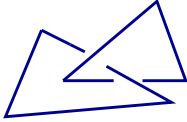
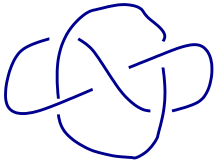
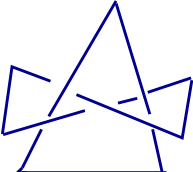
Entrelacet	Un diagramme	Représentation en batons
Trefoil ( $T$ )		
Figure-eight $F_8$		
$T(5,2)$		
Hopf link $2_1^2$		
$4_1^2$		

FIG. 2.8 – Les nœuds et entrelacets non triviaux les plus simples.



# Chapitre 3

## Théorie des Graphes

Dans ce chapitre, je présente mes travaux de recherche consacrés à des problèmes qui portent sur la théorie des graphes notamment au problèmes sur la décomposition de l'ensemble d'arêtes d'un graphe en chaînes ou en arbres ou encore en cycles.

### 3.1 Le spread (l'étendue) d'un graphe

Un *cycle eulérien* d'un graphe  $G$  est un cycle simple contenant chaque arête de  $G$ . On dit que  $G$  est un *graphe eulérien*, s'il est réduit à un sommet isolé ou s'il admet un cycle eulérien. Soit  $t$  un cycle eulérien, on a défini le *spread*( $t$ ) comme la distance minimale entre deux répétitions d'un même sommet en parcourant le cycle  $t$ . Soit  $G$  un graphe eulérien, le *spread*( $G$ ) est la valeur maximale du *spread*( $t$ ) sur tous les cycles eulériens  $t$  de  $G$ .

L'une des raisons qui m'a motivé à donner cette définition est la suivante : considérons le *problème de décomposition en chaînes* - soit  $G$  un graphe et soient  $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_m$  des entiers tels que  $\sum_{i=1}^m a_i = |E(G)|$ , existe-t-il une partition de l'ensemble des arêtes du  $G$  en chaînes élémentaires  $P_{a_1}, \dots, P_{a_m}$  de longueurs  $a_1, \dots, a_m$  ?

Si le graphe  $G$  est eulérien et de  $\text{spread}(G) \geq a_1$  alors on peut répondre à la question ci-dessus affirmativement en mettant les chaînes  $P_{a_i}$  le long du cycle eulérien  $t$  avec le  $\text{spread}(t) \geq a_1$ .

Dans [16], j'ai donné des bornes supérieures et inférieures pour le *spread* de quelques graphes eulériens.

**Théorème 3.1.1** [16] Soit  $m \geq 1$  un entier. Alors,

$$\text{spread}(K_{4m+1}) \geq 2m + 1$$

**Théorème 3.1.2** [16] Soit  $m \geq 2$  un entier. Alors,

$$\text{spread}(K_{4m+2} - F) \geq 2m + 1$$

où  $K_n - F$  est le graphe complet à  $n$  sommets moins un 1-facteur.

**Théorème 3.1.3** [16] Soit  $p$  un premier,  $p \equiv 3 \pmod{4}$  et soit  $x \in \mathbb{Z}_p$  d'ordre  $(p-1)/2$ . Alors,

$$\text{spread}(K_p) \geq (p+1)/x$$

Le théorème 3.1.3 est illustré dans l'exemple suivant avec  $p = 7$  et  $x = 2$ .

**Exemple 3.1.4** Un cycle eulérien  $t$  dans  $K_7$  avec les sommets  $\{v_0, \dots, v_6\}$  est donné par :

$$t = v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_0, v_2, v_4, v_6, v_1, v_3, v_5, v_0, v_4, v_1, v_5, v_2, v_3, v_6, v_0$$

et donc, le  $\text{spread}(K_7) \geq 4$ .

On sait [39] qu'il existe un entier positif  $k$  pour lequel il existe une infinité de nombres premiers  $p$ ,  $p \equiv 3 \pmod{4}$  tel que  $k$  est primitif modulo  $p$ . On remarque donc que pour un tel  $p$ , d'après le théorème 3.1.3, il existe un cycle eulérien  $t$  dans  $K_p$  avec le  $\text{spread}(t) \geq (p+1)/k^2$  (en prenant  $x = k^2$ ).

**Question 3.1.5** Est-il vrai que le  $\text{spread}(K_m)/m \rightarrow 1$  quand  $m \rightarrow \infty$  ?

**Question 3.1.6** Dans [16, Proposition 5.1], il a été démontré que le  $\text{spread}(K_{2n+1}) \leq 2n - 1$ . Est-il possible d'améliorer cette borne supérieure ?

## 3.2 Étiquetages gracieux

Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$  à  $m$  arêtes. Soit  $f : V(G) \rightarrow \{0, \dots, m\}$  une application injective. On dira que  $f$  est un *étiquetage gracieux* de  $G$  si les étiquettes sur les arêtes de  $G$ , où l'étiquette de l'arête  $e \in E(G)$  est définie par  $f'(e) = \{u, v\} = |f(u) - f(v)|$ , sont toutes différentes. Si un graphe  $G$  admet un étiquetage gracieux, on dira que  $G$  est un graphe *gracieux*.

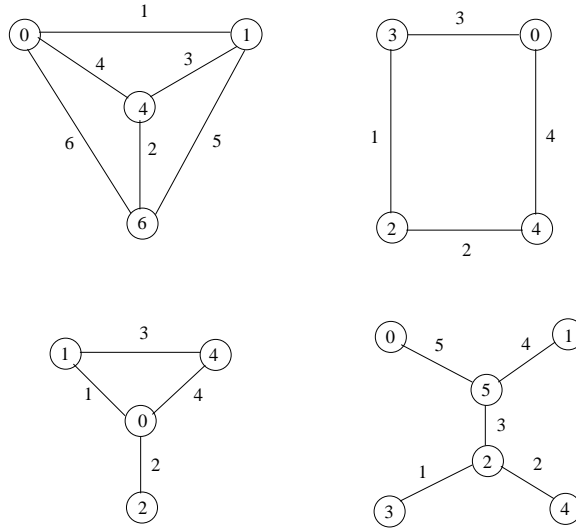


FIG. 3.1 – Graphes gracieux.

La figure 3.1 illustre quatre graphes gracieux avec les étiquetages gracieux correspondants.

Il existe des graphes qui ne sont pas gracieux. Par exemple, le cycle  $C_n$  est gracieux, si et seulement si  $n \equiv 0$  ou  $3 \pmod{4}$ . Ringel et Kotzig ont conjecturé [51] que tout arbre est gracieux<sup>1</sup> (dans ce cas, la fonction  $f$  est nécessairement bijective).

Etant donné un graphe  $G$  avec les sommets  $v_1, \dots, v_n$  et un vecteur  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  des entiers positifs, on construit le *graphe des stables*  $R_{\mathbf{x}}(G)$  en remplaçant chaque sommet  $v_i$  par un *stable*  $S_i$  à  $x_i$  sommets et deux stables  $S_i$  et  $S_j$  induisent un graphe biparti si et seulement si les sommets  $v_i$  et  $v_j$  sont adjacents dans  $G$ . Dans [10], j’ai démontré que certaines familles de graphes de stables sont gracieux. Ci-dessous, j’en présente quelques-uns.

**Théorème 3.2.1** [10] *Soient  $P_n$  une chaîne de longueur  $n \geq 1$  et  $C_n$  un cycle de longueur  $n \geq 3$ . Alors,*

- (a)  $R_{\mathbf{x}}(P_n)$  est gracieux pour tout  $n \geq 1$  et tout  $\mathbf{x}$

---

<sup>1</sup>L’une des motivations pour étudier cette conjecture est l’application suivante : si un arbre  $T$  à  $m$  arêtes est gracieux alors l’ensemble des arêtes de  $K_{2m+1}$  peut être décomposé en  $2m + 1$  copies de  $T$ .

(b)  $R_{\mathbf{x}}(C_n)$  est gracieux si

(1)  $\mathbf{x} = (2, \dots, 2)$  et  $n$  pair ou

(2)  $\mathbf{x} = (m, 1, \dots, 1)$  et  $n \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $m \geq 1$  ou

(3)  $\mathbf{x} = (2, 2, 1, \dots, 1)$  et  $n \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $n \geq 12$ .

J'ai aussi étudié le nombre d'étiquetages gracieux,  $e(K_{m,n})$ , différents pour le graphe biparti complet  $K_{m,n}$ .

**Théorème 3.2.2** [10]

$$e(K_{m,n}) \geq \begin{cases} 2(\phi(m) + \phi(n) - 2) & \text{si } m \neq n, \\ 2\phi(m) & \text{sinon.} \end{cases}$$

où  $\phi(r)$  note le nombre de facteurs de l'entier  $r$ .

**Question 3.2.3** Soit  $m, n$  des entiers positifs avec  $n \leq m$  et soient  $T_{a_1}, \dots, T_{a_m}$  des arbres à  $a_1, \dots, a_m$  arêtes, ayant des racines  $r_{a_1}, \dots, r_{a_m}$  et tels que  $\sum_{i=1}^m a_i = \frac{n(n-1)}{2}$ . Existe-t-il une décomposition racinée de l'ensemble d'arêtes du graphe complet à  $n$  sommets en  $T_{a_1}, \dots, T_{a_m}$  (c'est-à-dire une décomposition où chaque racine  $r_{a_i}$  commence à un sommet différent de  $K_n$  ? Qu'en est-il si  $m = n$  et chaque  $T_i$  est une chaîne où sa racine est à l'un des sommets intérieurs (et non à l'une des extrémités de la chaîne) ?

### 3.3 La conjecture d'Alspach

Alspach a proposé [35] la conjecture suivante : soit  $n$  un entier impair (ou respectivement  $n$  un entier pair) et  $a_1, \dots, a_m$  des entiers tels que  $a_1 + \dots + a_m = \frac{n(n-1)}{2}$  (ou respectivement  $a_1 + \dots + a_m = \frac{n(n-2)}{2}$ )  $3 \leq a_i \leq n$ , existe-t-il une partition de l'ensemble des arêtes du graphe complet à  $n$  sommets (ou respectivement le graphe complet à  $n$  sommets moins un 1-facteur) en cycles élémentaires de longueur  $a_1, \dots, a_n$  ?

J'ai démontré [18] que la conjecture d'Alspach est vraie pour certaines valeurs  $a_1, \dots, a_m$ .

**Théorème 3.3.1** [18] La conjecture d'Alspach est vraie si

(a)  $(a_1, \dots, a_m) = (n-1, n-2, \dots, 4, 3, 3)$  et  $n \geq 1$  impair ou

(b)  $(a_1, \dots, a_m) = (\underbrace{n, \dots, n}_n, \underbrace{n+1, \dots, n+1}_n)$  et  $n \geq 1$  impair ou

(b)  $(a_1, \dots, a_m) = (2n - 2, 2n - 2, 2n - 4, 2n - 4, \dots, 6, 6, 4, 4, 4)$  et  $n \geq 2$  pair.

J'ai aussi démontré le résultat suivant concernant le graphe multiparti complet.

**Théorème 3.3.2** [18] *L'ensemble des arêtes du graphe multiparti complet  $\underbrace{K_{m, \dots, m}}_t$  peut être décomposé en cycles (arêtes-disjointes) de longueur*

$$\left( \underbrace{3, \dots, 3}_{\frac{t(t-1)}{2}}, \underbrace{5, \dots, 5}_{\frac{t(t-1)}{2}}, \dots, \underbrace{2m-1, \dots, 2m-1}_{\frac{t(t-1)}{2}} \right)$$

avec  $m, t \geq 3$  des entiers impairs.

A ce jour, on ne sait pas si la conjecture d'Alspach est vraie pour toute séquence  $a_1, \dots, a_m$ . Dans [32], j'ai proposé le problème suivant qui peut être considéré comme une version moins restreinte que la conjecture d'Alspach.

**Problème 3.3.3** *Soit  $n$ , un entier impair (ou respectivement  $n$  un entier pair) et  $a_1, \dots, a_m$  des entiers tels que  $a_1 + \dots + a_m = \frac{n(n-1)}{2}$  (ou respectivement  $a_1 + \dots + a_m = \frac{n(n-2)}{2}$ )  $3 \leq a_i \leq n$ , existe-t-il une partition de l'ensemble des arêtes du graphe complet à  $n$  sommets (ou respectivement le graphe complet à  $n$  sommets moins un 1-facteur) en cycles simples (c'est-à-dire des cycles qui peuvent utiliser plusieurs fois un même sommet) de longueur  $a_1, \dots, a_n$  ?*

## 3.4 Le combinoèdre

Soient  $R = \{r_1, \dots, r_m\}$  des entiers positifs avec  $r_1 \geq \dots \geq r_m$  et soient  $e_1, \dots, e_n$  des symboles différents. Si  $\sum_{i=1}^m r_i$  alors le *combinoèdre*, noté par  $C(r_1, \dots, r_m)$  ou  $C(R)$ , est défini comme le graphe où ses sommets sont tous les  $n$ -uple dans lesquels le symbole  $e_i$  apparaît exactement  $r_i$  fois et deux sommets  $(u_1, \dots, u_n)$  et  $(v_1, \dots, v_n)$  sont reliés par une arête si et seulement si il existe un indice  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$  tel que  $u_k = v_{k+1}$ ,  $u_{k+1} = v_k$  et  $u_i = v_i$  pour tout  $i \neq k, k+1$ . On remarque que le graphe connu comme le *permutaèdre*, noté par  $P_n$ , est un cas particulier du combinoèdre quand  $r_i = 1$  pour tout  $i$ .

Les combinatoires sont non seulement des graphes (en tant qu'objet combinatoire) mais aussi des ensembles ordonnés. Plus précisément, le *treillis multinomial*  $L(r_1, \dots, r_m)$  (ou  $L(R)$ ) est formé de tous les mots de longueur  $n$  sur l'alphabet  $\{1, \dots, m\}$  où chaque mot est composé de  $r_1 1$ 's,  $r_2 2$ 's,  $\dots$ ,  $r_m m$ 's. Le mot  $s$  *couvre* le mot  $t$  si  $s$  et  $t$  n'ont qu'une paire adjacente différente dans l'ordre numérique pour  $s$  mais dans l'ordre inverse pour  $t$ .

Soient  $a_1, \dots, a_m$  des entiers positifs. Le *morceau cubique*  $\llbracket a_1, \dots, a_m \rrbracket$  est le graphe ayant comme sommets les points  $\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d : 0 \leq x_i \leq a_i\}$  et deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si la distance euclidienne entre eux est égale à un. Si, en plus  $\gamma \in \mathbb{N}$  est donné, alors le *morceau racine*  $\langle\langle a_1, \dots, a_m \rangle\rangle_\gamma$  est le graphe ayant comme sommets les points  $A^d = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d : x_1 + \dots + x_d = \gamma, 0 \leq x_i \leq a_i\}$  et deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si la distance euclidienne entre eux est égale à  $\sqrt{2}$ . Remarquons que si  $\gamma$  est assez grand alors le graphe  $\langle\langle a_1, \dots, a_m \rangle\rangle_\gamma$  est vide. En outre, on observe que les points de  $A^d$  sont tous dans l'hyperplan  $\sum x_i = \gamma$  qui est  $(d - 1)$ -dimensionnel ainsi que  $A^1$  et  $A^2$  sont équivalents à  $\mathbb{Z}$  et au treillis hexagonale respectivement.

On dit qu'un graphe  $H$  est *plongeable* dans un graphe  $G$  si  $H$  est isomorphe à un sous-graphe de  $G$ . Dans [4], des plongements explicites du combinatoire dans des morceaux cubiques et dans des morceaux racines sont donnés.

**Théorème 3.4.1** [4] *Le combinatoire est plongeable dans le morceau cubique*

$$\llbracket \underbrace{r_1, \dots, r_1}_{r_2}, \underbrace{r_1 + r_2, \dots, r_1 + r_2}_{r_3}, \dots, \underbrace{\sum_{i=1}^{m-1} r_i, \dots, \sum_{i=1}^{m-1} r_i}_{r_m} \rrbracket$$

Ce théorème généralise le résultat connu selon lequel  $P_n$  est plongeable dans  $\llbracket 1, \dots, n \rrbracket$  et implique que la dimension de  $L(r_1, \dots, r_m)$  est au plus  $\sum_{i=2}^m r_i$ . La figure 3.2 illustre quelques exemples du plongement dans des morceaux cubiques.

Le *diamètre* de  $C(R)$  est défini comme  $\phi(R) = \max_{u,v \in V(C)} \{d(u, v)\}$  où  $d(u, v)$  est le nombre d'arêtes d'une chaîne minimale qui relie  $u$  et  $v$ . On a montré [4, Proposition 2.1] que  $\phi(R) = \sum_{1 \leq i < j \leq m} r_i r_j$  (on remarque que  $\phi(R)$  est la longueur d'une chaîne maximale dans  $L(R)$ ).

**Théorème 3.4.2** [4]  *$C(R)$  est plongeable dans le morceau racine*

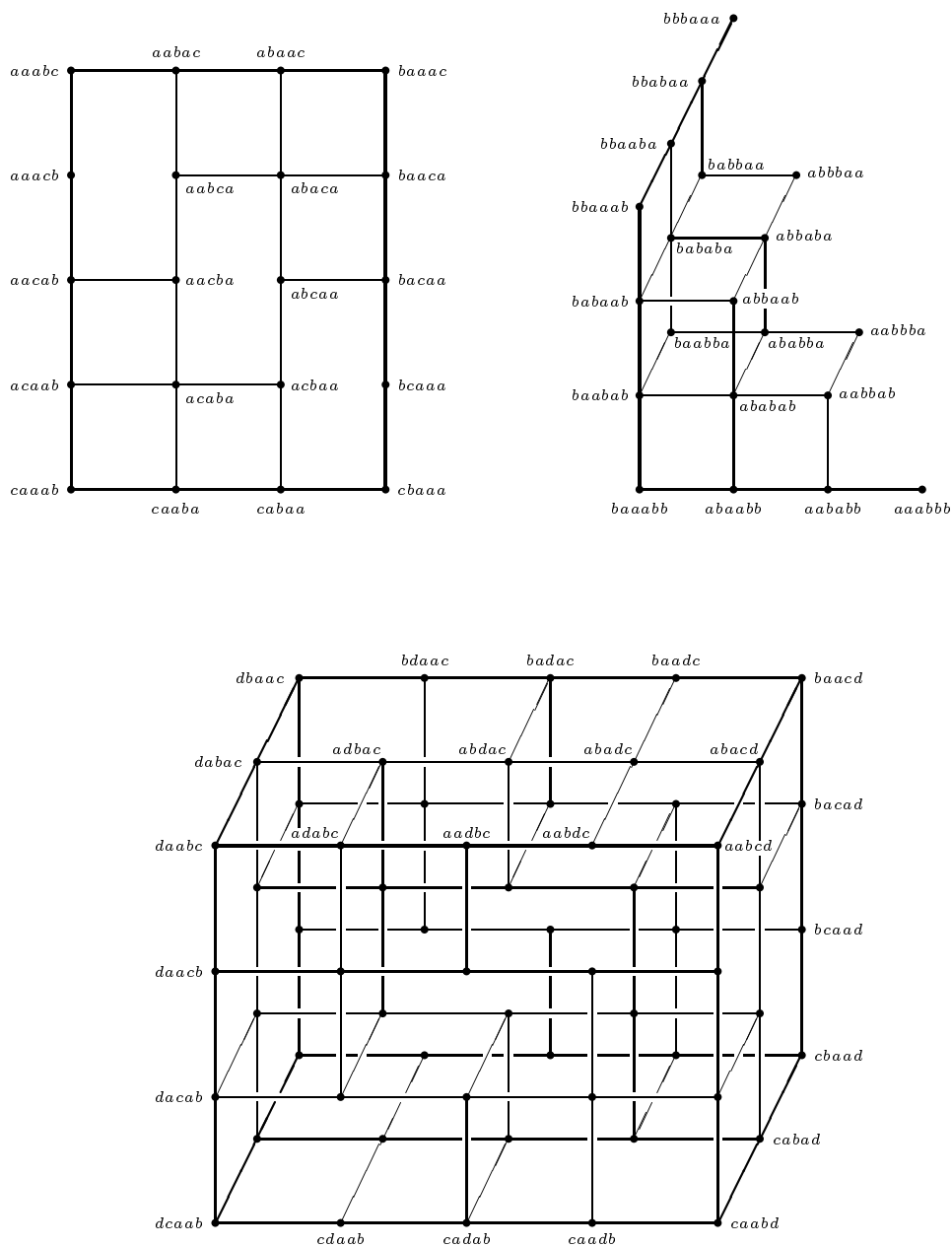


FIG. 3.2 – Plongements de  $C(3,1,1)$ ,  $C(3,3)$  et  $C(2,1,1,1)$  dans  $\llbracket 3,4 \rrbracket$ ,  $\llbracket 3,3,3 \rrbracket$  et  $\llbracket 2,3,4 \rrbracket$  respectivement.

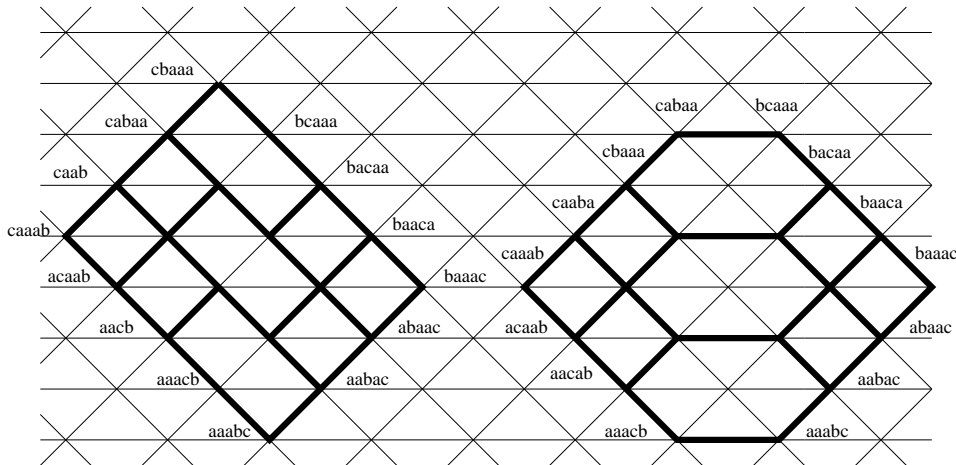


FIG. 3.3 – Le treillis hexagonal. Plongements de  $C(3, 1, 1)$  dans  $\langle\langle 3, 4, 7 \rangle\rangle_7$  (proposé par le théorème 3.4.2) et dans  $\langle\langle 6, 4, 4 \rangle\rangle_7$  (proposé par le théorème 3.4.3).

$$\langle\langle \underbrace{r_1, \dots, r_1}_{r_2}, \underbrace{r_1 + r_2, \dots, r_1 + r_2}_{r_3}, \dots, \underbrace{\sum_{i=1}^{m-1} r_i, \dots, \sum_{i=1}^{m-1} r_i}_{r_m}, \phi(R) \rangle\rangle_{\phi(R)}.$$

**Théorème 3.4.3** [4] *Le combinotoèdre  $C(r, \underbrace{1, \dots, 1}_w)$  est plongeable dans le morceau racine*

$$\langle\langle rw, \underbrace{n-1, \dots, n-1}_w \rangle\rangle_{w(r+n-1)/2}.$$

Les figures 3.3 et 3.4 illustrent quelques exemples de plongements dans des morceaux racines.

**Conjecture 3.4.4** *Pour tout  $C(r, \underbrace{1, \dots, 1}_w)$ , le polytope défini par l'enveloppe convexe de l'ensemble de points dans le plongement proposé par le théorème 3.4.3 pave  $\mathbb{R}^w$ .*

La figure 3.5 donne un exemple de la validité de cette conjecture pour  $d = 2$ .

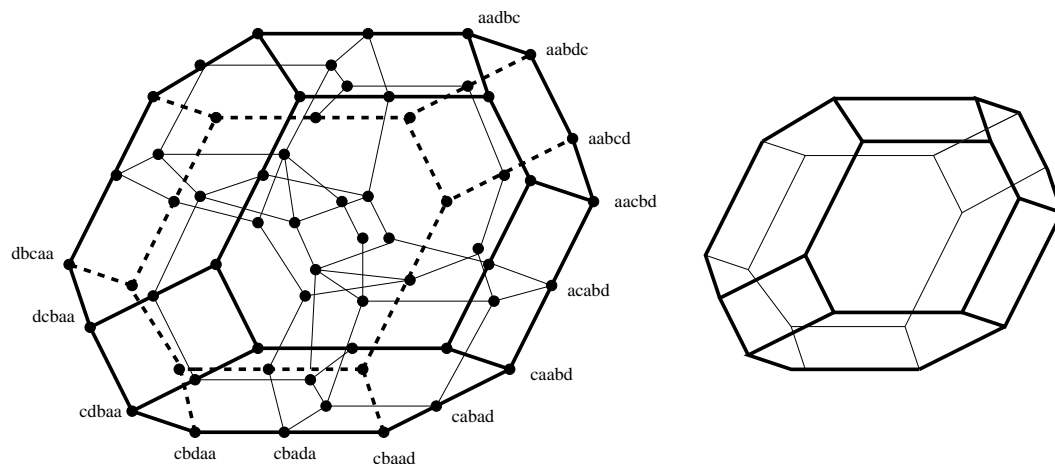


FIG. 3.4 – Plongement de  $C(2, 1, 1, 1)$  dans  $\langle\langle 6, 4, 4, 4 \rangle\rangle_9$  et son enveloppe convexe.

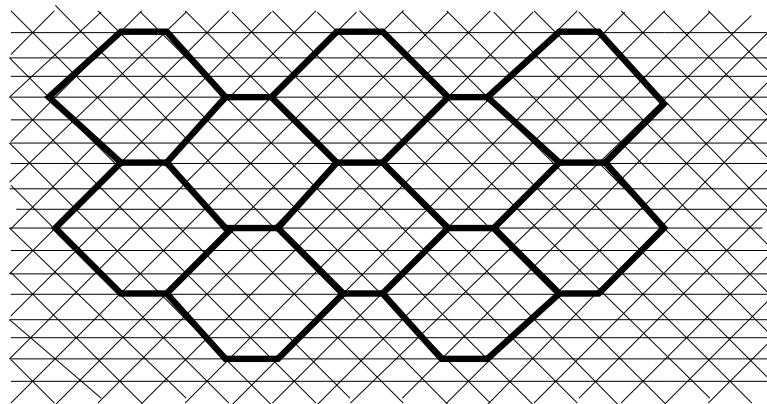


FIG. 3.5 – Pavage de  $\mathbb{R}^2$  avec  $C(3, 1, 1)$  plongé dans  $\langle\langle 6, 4, 4 \rangle\rangle_7$ .



# Bibliographie

- [1] J.M. Marin, J.L.Ramírez Alfonsín et M.P. Revuelta, On the Frobenius number of Fibonacci numerical semigroups, *INTEGERS* **7** (2007), A14.
- [2] J.L. Ramírez Alfonsín, Knots and links in spatial graphs : a survey, *Discrete Mathematics*, **302** (1-3) (2005), 225-242.
- [3] D. Forge, J.L. Ramírez Alfonsín et H. Yeun, Disconnected coverings for oriented matroids via simultaneous mutations, *Discrete Mathematics*, **258**(1) (2002), 353-359.
- [4] J.L. Ramírez Alfonsín et D. Romero, Embeddability of the Combinohedron, *Discrete Mathematics*, **254**(1-3) (2002), 473-483.
- [5] J.L. Ramírez Alfonsín, Lawrence oriented matroids and a problem of McMullen on projective equivalences of polytopes, *European Journal of Combinatorics*, **22**(5) (2001), 723-731.
- [6] J.L. Ramírez Alfonsín, On linked spatial representations, *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, **10**(2) (2001), 143-150.
- [7] D. Forge et J.L. Ramírez Alfonsín, On counting the  $k$ -face cells of the cyclic arrangement, *European Journal of Combinatorics*, **22** (2001), 307-312.
- [8] D. Forge et J.L. Ramírez Alfonsín, On reconstructing arrangements from their sets of simplices, *Discrete Mathematics*, **226** (2001), 175-190.
- [9] J.L. Ramírez Alfonsín, Cyclic arrangements and Roudneff's conjecture in the space, *Information Processing Letters* **71** (1999), 179-182.
- [10] J.L. Ramírez Alfonsín, Gracefulness of replicated paths and cycles, *Ars Combinatoria* **53** (1999), 257-269.

---

Tous mes travaux de recherche sont disponibles sur le site :  
<http://www.ecp6.math.jussieu.fr/pageperso/ramirez/habilitation/>

- [11] J.L. Ramírez Alfonsín, Spatial graphs and oriented matroids : the trefoil, *Discrete and Computational Geometry* **22** (1999), 149-158.
- [12] D. Forge et J.L. Ramírez Alfonsín, Connected coverings and an application to oriented matroids, *Discrete Mathematics* **187** (1998), 109-121.
- [13] D. Forge et J.L. Ramírez Alfonsín, Straight line arrangements in the real projective plane, *Discrete and Computational Geometry* **20** (1998), 155-161.
- [14] J.L. Ramírez Alfonsín, A special arrangement with minimal number of triangles, *Information Processing Letters* **67** (1998), 273-276.
- [15] J.L. Ramírez Alfonsín, On variations of the subset sum problem, *Discrete Applied Mathematics* **81** (1998), 1-7.
- [16] J.L. Ramírez Alfonsín, The spread of  $K_n$ , *Discrete Mathematics* **175** (1997), 221-229.
- [17] J.L. Ramírez Alfonsín, Complexity of the Frobenius problem, *Combinatorica* **16** (1996), 143-147.
- [18] J.L. Ramírez Alfonsín, Cycle decompositions of complete and complete multipartite graphs, *Australasian Journal of Combinatorics* **11** (1995), 233-238.
- [19] C. McDiarmid et J.L. Ramírez Alfonsín, Sharing jugs of wine, *Discrete Mathematics* **125** (1994), 279-287.
- [20] J.L. Ramírez Alfonsín, Pruebas de conocimiento cero, *Miscelánea Matemática* **22** (1995), 55-56.

#### **A paraître et soumis**

- [21] J.L. Ramírez Alfonsín, Gaps in semigroups, *Discrete Mathematics*, à paraître (12 pages).
- [22] J.L. Ramírez Alfonsín, Some remarks on gaps, *Semigroup Forum*, soumis (5 pages).
- [23] J.L. Ramírez Alfonsín, Tiling rectangles and torus, *Discrete and Computational Geometry*, soumis (9 pages).
- [24] J.L. Ramírez Alfonsín, Spatial graphs, knots and the cyclic polytope, *Discrete and Computational Geometry*, soumis (15 pages).

#### **En préparation**

- [25] J.L. Ramírez Alfonsín, The Frobenius number via the radius covering, en préparation.

- [26] J.L. Ramírez Alfonsín, Bubbles in trivial knots, en préparation.

### Chapitres de livre

- [27] J.L. Ramírez Alfonsín, On the unknotting problem, dans ‘Complexity and Chance’, (éditeurs : C.H. McDiarmid et G.R. Grimmett) *Oxford University Press*, (2007), 260-271.
- [28] J.-C. Fournier et J.L. Ramírez Alfonsín, Bases et généralités (appendice), dans ‘Graphes et Applications 1’, (éditeur : J.-C. Fournier), *Hermes Sci. Pub. Ltd*, (2007), 17-64.
- [29] J.-C. Fournier, F. de la Vega et J.L. Ramírez Alfonsín, Graphes et probabilités, dans ‘Graphes et Applications 2’, (éditeur : J.-C. Fournier), *Hermes Sci. Pub. Ltd*, (2007), 161-193.
- [30] C. Berge et J.L. Ramírez Alfonsín, Genesis and origins, dans ‘Perfect Graphs’ (éditeurs : J.L. Ramírez Alfonsín et B. Reed) *Wiley and Sons*, (2001), 1-12.

### Livre écrit

- [31] J.L. Ramírez Alfonsín, The Diophantine Frobenius Problem, *Oxford Lectures Series in Mathematics and its Applications* **30**, *Oxford University Press*, (2005), 256 pages.

### Livres édités

- [32] Graph Theory in Paris : proceedings of a conference in memory of Claude Berge (éditeurs : A. Bondy, J. Fonlupt, J.L. Fouquet, J.-C. Fournier et J.L. Ramírez Alfonsín), *Trends in Mathematics, Birkhäuser*, (2006), 350 pages.
- [33] Perfect Graphs (éditeurs : J.L. Ramírez Alfonsín et Bruce Reed), *Wiley and Sons, Chichester, U.K.*, (2001), 362 pages.
- [34] Probabilistic Methods for Algorithmic Discrete Mathematics, (éditeurs : M. Habib, C. McDiarmid, J.L. Ramírez Alfonsín et B. Reed) *Algorithms and Combinatorics* **16**, *Springer-Verlag, Berlin*, (1998), 323 pages.

## Autres articles cités

- [35] B. Alspach, Research Problems 3 *Discrete Mathematics* **36** (1981), 333.
- [36] B. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White et G. Ziegler, *Oriented Matroids* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **43** Cambridge University Press, U.K. (1993).
- [37] M. Bras-Amorós, Fibonacci-like behavior of the number of numerical semigroups of a given genus, *Semigroup Forum*, à paraître.
- [38] A. Brauer, On a problem of partitions, *Amer. Journal of Math.* **64** (1942), 299-312.
- [39] D.R. Heath-Brown, Artin's conjecture for primitive roots, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **37** (1987), 27-38.
- [40] T.H. O'Beirne, Puzzles and Paradoxes, *Oxford University Press, New York and London*, (1965).
- [41] C. Carathéodory, Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von potenzreihen die gegebene Werte nicht annehmen, *Mat. Ann.* **64** (1904), 95-115.
- [42] R. Cordovil et I.P. da Silva, A problem de McMullen on the projective equivalences of polytopes, *Europ. J. Combinatorics* **6** (1985), 157-161.
- [43] J.H. Conway et C.McA. Gordon, Knots on spatial graphs, *Journal of Graph Theory* **7** (1983), 445-453.
- [44] R. Fröberg, C. Gottlieb et R. Häggkvist, On numerical semigroups, *Semigroup Forum* **35**(1) (1987), 63-83.
- [45] D. G. Larman, On sets projectively equivalent to the vertices of a convex polytope, *Bull. London Math. Soc.* **4** (1972), 6-12.
- [46] Y.O. Hamidoune et M. Las Vergnas, Directed switches games on graphs and matroids, *J. Combinatorial Theory Ser. B* **40** (1986), 237-269.
- [47] P. McMullen, The maximal number of faces of a convex polytope, *Mathematika* **17** (1970), 179-184.
- [48] K. Mirasugi, *Knot Theory and its Applications* Birkhäuser, Basel (1996).
- [49] C.H. Papadimitriou and K. Steiglitz, *Combinatorial Optimization : Algorithms and Complexity*, Prentice-Hall, Inc., (1982).
- [50] G. Pick, Geometrisches zur Zahlenlehre, *Sitzungsber. Lotos (Prague)* **19** (1899), 311-319.

- [51] A. Rosa, On certain valuations of the vertices of a graph, Theory of Graphs (International Symposium, Rome, Italy 1966) *Gordon and Breach* New York and Dunod Paris (1967), 349-355.
- [52] J.-P. Roudneff, Cells with many facets in arrangements of hyperplanes *Disc. Math.* **98** (1991), 185-191.
- [53] J.-P. Roudneff, On the number of triangles in simple arrangements of pseudolines in the real projective plane *Disc. Math.* **60** (1986), 243-251.
- [54] J.-P. Roudneff et B. Sturmfels, Simplicial cells in arrangements and mutations in oriented matroids *Geometriae Dedicata* **23** (1987), 221-227.
- [55] H. Sachs, On a spatial analogue of Kuratowski's theorem on planar graphs - an open problem, Graph Theory, (M. Borowiecki, J.W. Kennedy and M.M. Syslo, eds.) Proceedings of the Conference in memoriam K. Kuratowski (Lagow, Poland, 1981), Lecture Notes in Mathematics, **1018** Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, (1983), 230-241.
- [56] R.S. Shannon, Simplicial cells in arrangements of hyperplanes, *Geometriae Dedicata* **8** (1979), 179-187.